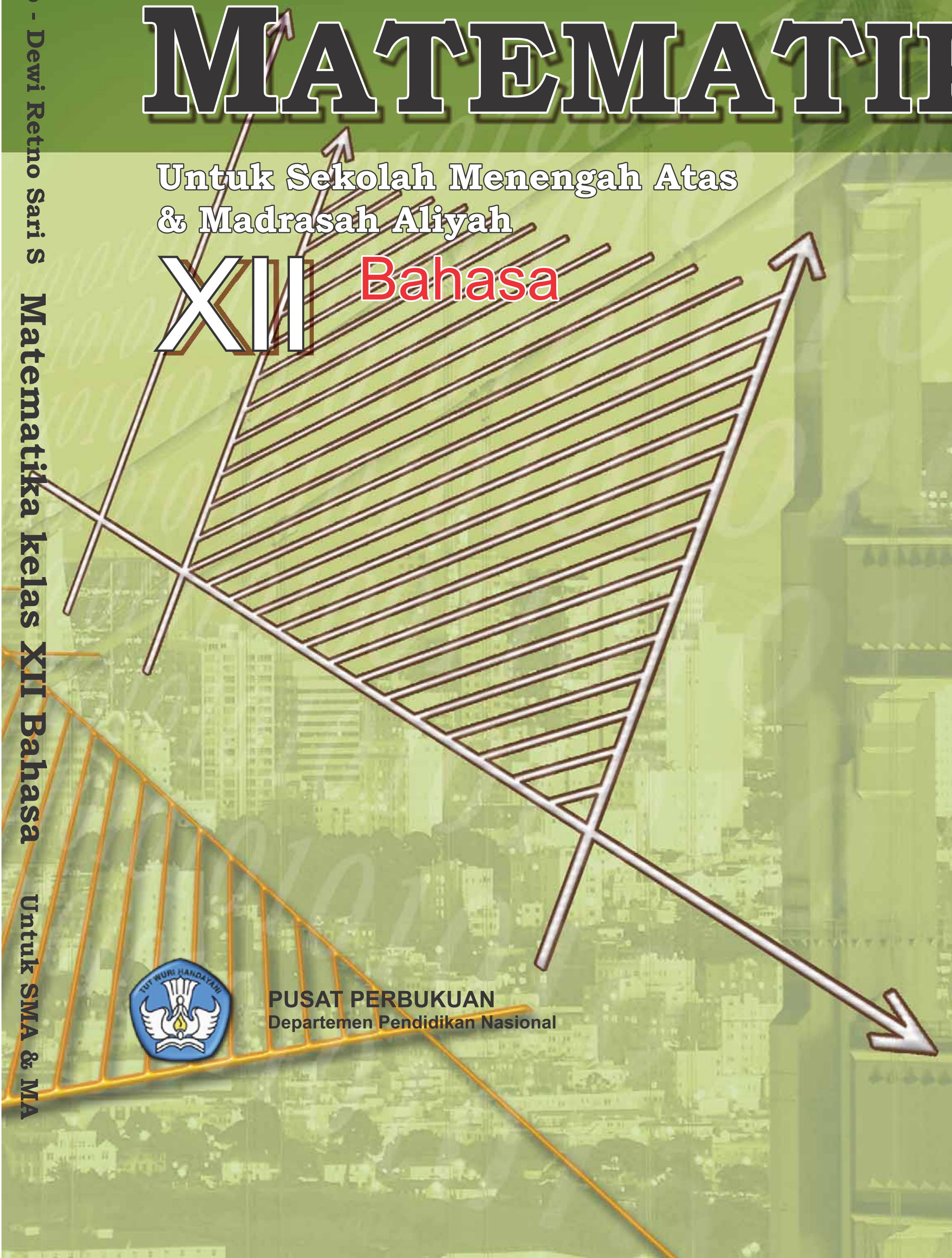
Pangarso Yuliatmoko
Dewi Retno Sari S

MATEMATIKA

Untuk Sekolah Menengah Atas & Madrasah Aliyah

XII Bahasa



PUSAT PERBUKUAN
Departemen Pendidikan Nasional

Pangarso Yuliatmoko - Dewi Retno Sari S
Matematika kelas XII Bahasa
Untuk SMA & MA

Pangarso Yuliatmoko
Dewi Retno Sari S

Matematika

XII Program Bahasa

SMA/MA

Pusat Perbukuan
Departemen Pendidikan Nasional

Hak Cipta Buku ini dibeli oleh Departemen Pendidikan Nasional
dari Penerbit Karya Mandiri Nusantara, PT

Matematika

Untuk SMA/MA Kelas XII Program Bahasa

Penulis:
Pangarso Yuliatmoko
Dewi Retno Sari S

Editor:
Enik Yuliatin
Penata Letak Isi:
Sudaryanto
Desainer Sampul:
Adi Wahyono
Ilustrator:
Susanto
Sumber Ilustrasi Cover:
CD Image
Ukuran Buku
17,6 × 25 cm

510.07
YUL YULIATMOKO, Pangarso
m Matematika : untuk Sekolah Menengah Atas dan Madrasah Aliyah
kelas XII program bahasa/Pangarso Yuliatmoko, Dewi Retno Sari S ;
editor Enik Yuliatin. — Jakarta : Pusat Perbukuan, Departemen Pendidikan
Nasional, 2008.
viii, 128 hlm. : ilus. ; 25 cm.
Bibliografi : hlm.125
Indeks.
ISBN 979-462-911-1
1. Matematika-Studi dan Pengajaran I. Judul
II. Dewi Retno Sari S III. Yuliatin, Enik

Diterbitkan oleh Pusat Perbukuan
Departemen Pendidikan Nasional
Tahun 2008

Diperbanyak oleh ...

Kata Sambutan

Puji syukur kami panjatkan ke hadirat Allah SWT, berkat rahmat dan karunia-Nya, Pemerintah, dalam hal ini, Departemen Pendidikan Nasional, pada tahun 2008, telah membeli hak cipta buku teks pelajaran ini dari penulis/penerbit untuk disebarluaskan kepada masyarakat melalui situs internet (*website*) Jaringan Pendidikan Nasional.

Buku teks pelajaran ini telah dinilai oleh Badan Standar Nasional Pendidikan dan telah ditetapkan sebagai buku teks pelajaran yang memenuhi syarat kelayakan untuk digunakan dalam proses pembelajaran melalui Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Nomor 34 Tahun 2008.

Kami menyampaikan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada para penulis/penerbit yang telah berkenan mengalihkan hak cipta karyanya kepada Departemen Pendidikan Nasional untuk digunakan secara luas oleh para siswa dan guru di seluruh Indonesia.

Buku-buku teks pelajaran yang telah dialihkan hak ciptanya kepada Departemen Pendidikan Nasional ini, dapat diunduh (*down load*), digandakan, dicetak, dialihmediakan, atau difotokopi oleh masyarakat. Namun, untuk penggandaan yang bersifat komersial harga penjualannya harus memenuhi ketentuan yang ditetapkan oleh Pemerintah. Diharapkan bahwa buku teks pelajaran ini akan lebih mudah diakses sehingga siswa dan guru di seluruh Indonesia maupun sekolah Indonesia yang berada di luar negeri dapat memanfaatkan sumber belajar ini.

Kami berharap, semua pihak dapat mendukung kebijakan ini. Kepada para siswa kami ucapkan selamat belajar dan manfaatkanlah buku ini sebaik-baiknya. Kami menyadari bahwa buku ini masih perlu ditingkatkan mutunya. Oleh karena itu, saran dan kritik sangat kami harapkan.

Jakarta, Juli 2008

Kepala Pusat Perbukuan

Kata Pengantar

Puji syukur kami panjatkan ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa atas rahmat-Nya sehingga kami dapat menyelesaikan buku ini. Buku ini kami tujukan untuk membantu siswa-siswi SMA Kelas XII Program Bahasa untuk dapat belajar secara mandiri dalam mempersiapkan diri sebagai generasi penerus bangsa, dan secara umum agar dapat membantu suksesnya pendidikan nasional dalam rangka mencerdaskan kehidupan bangsa.

Di kelas ini kalian kembali belajar matematika. Agar kalian mudah mempelajarinya, buku ini disajikan dengan bahasa yang sederhana dan komunikatif. Setiap kajian dilengkapi tugas dengan arahan kegiatan dan tugas yang sesuai dengan kehidupan sehari-hari agar kalian dapat menghubungkan antara konsep dan penerapannya. Setipa akhir bab juga dilengkapi dengan uji kompetensi yang bisa mengevaluasi kemampuan kalian dalam memahami materi yang sudah dijelaskan. Materi yang diberi tanda (**) dimaksudkan sebagai pengayaan untuk siswa.

Ucapan terima kasih kami sampaikan kepada semua pihak yang tekah membantu terselesaikannya buku ini sehingga dapat disajikan kepada siswa. Namun demikian buku ini pastilah tak luput dari kekurangan-kekurangan. Oleh karena itu berbagai macam perbaikan termasuk saran dan kritik dari pembaca sangat kami harapkan demi kesempurnaan buku ini.

Tim Penyusun

Petunjuk Penggunaan Buku

Apersepsi, mengantarkan siswa kepada materi yang akan dipelajari. Berisi uraian singkat, contoh penerapan, dan prasyarat yang harus dikuasai.

Bab

1

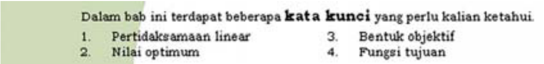
Program Linear

Salah satu ukuran untuk menentukan baik tidaknya suatu model matematis adalah kemampuan model tersebut membuat prediksi. Apabila sebuah model matematis dapat membantu membuat suatu prediksi yang lebih baik, maka prediksi yang dihasilkan akan sangat berarti. Dengan prediksi yang tepat maka seorang pialang bisa mendapatkan laba maksimum dalam melaksanakan kegiatannya.

Peta konsep berikut memudahkan kalian dalam mempelajari seluruh materi pada bab ini.

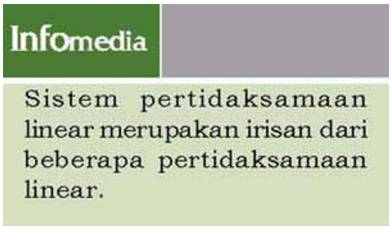
Peta Konsep mempermudah alur berpikir dan pemahaman materi sehingga lebih sistematis.

Kata Kunci berisi kata-kata penting dalam setiap bab yang nantinya mempermudah dalam mengingat bahan ajar yang dibahas.



Dalam bab ini terdapat beberapa **kata kunci** yang perlu kalian ketahui.

1. Pertidaksamaan linear
2. Nilai optimum
3. Bentuk objektif
4. Fungsi tujuan

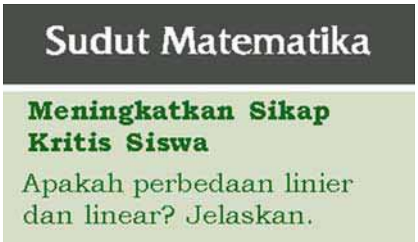


Infomedia

Sistem pertidaksamaan linear merupakan irisan dari beberapa pertidaksamaan linear.

Infomedia berisi pengetahuan umum atau wawasan yang berkaitan dengan materi yang dibahas.

Sudut Matematika berisi kegiatan yang menuntut kemampuan analisis dan sikap kritis siswa.



Sudut Matematika

Meningkatkan Sikap Kritis Siswa

Apakah perbedaan linier dan linear? Jelaskan.

Kegiatan Menulis 1.1

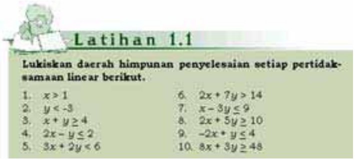
Setelah mempelajari contoh di atas, cara menentukan daerah himpunan penyelesaian tanpa titik uji secara cepat dapat dilihat pada tabel di bawah.

Pertidaksamaan	$b > 0$	$b < 0$	$b = 0$
$ax + by \leq c$	Daerah himpunan penyelesaian berada di bawah garis $ax + by = c$	Daerah himpunan penyelesaian berada di atas garis $ax + by = c$	Daerah himpunan penyelesaian berada di kiri garis $x = c/a$
$ax + by \geq c$	Daerah himpunan penyelesaian berada di atas garis $ax + by = c$	Daerah himpunan penyelesaian berada di bawah garis $ax + by = c$	Daerah himpunan penyelesaian berada di kanan garis $x = c/a$

Dari tabel di atas, apa yang dapat kalian simpulkan?

Kegiatan menulis disajikan sebagai tugas yang dapat mengungkap kemampuan analisis siswa.

Latihan setiap akhir subbab disajikan untuk menguji kemampuan siswa setiap subbabnya.

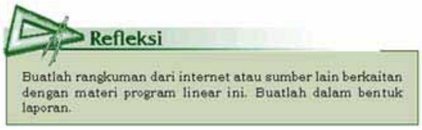


Latihan 1.1

Lukiskan daerah himpunan penyelesaian setiap pertidaksamaan linear berikut.

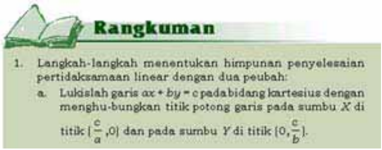
1. $x > 1$
2. $y < -3$
3. $x + y \geq 4$
4. $2x - y \leq 2$
5. $3x + 2y < 6$
6. $2x + 7y > 14$
7. $x - 3y \leq 9$
8. $2x + 5y \geq 10$
9. $-2x + y \leq 4$
10. $8x + 3y \geq 48$

Refleksi disajikan untuk mengungkap kesan siswa setelah mempelajari suatu bab.



Refleksi

Buatlah rangkuman dari internet atau sumber lain berkaitan dengan materi program linear ini. Buatlah dalam bentuk laporan.



Rangkuman

1. Langkah-langkah menentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan linear dengan dua peubah:
   a. Lukislah garis $ax + by = c$ pada bidang kartesius dengan menghu-bungkan titik potong garis pada sumbu X di titik $(\frac{c}{a}, 0)$ dan pada sumbu Y di titik $(0, \frac{c}{b})$.

Rangkuman merupakan intisari materi sehingga memudahkan siswa mengingat inti dari materi.

Uji Kompetensi disajikan untuk meningkatkan kemampuan siswa memahami materi satu bab dan sebagai latihan dalam satu bab.

Uji Kompetensi

A. Berilah tanda silang (X) pada huruf *a*, *b*, *c*, *d*, atau *e* yang kalian anggap benar.

1. Daerah himpunan penyelesaian $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 8$, $2x + 5y \geq 10$, $x, y \in R$. Maka nilai maksimum untuk $x + 2y$ pada himpunan penyelesaian tersebut adalah . . . .
   a. 20
   b. 16
   c. 8
   d. 5
   e. 4

Latihan Semester 1

Berilah tanda silang (X) pada huruf *a*, *b*, *c*, *d*, atau *e* yang kalian anggap benar.

1. Apabila $x, y \in R$ terletak pada himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan . . . .
   $x + 3y \leq 9$
   $2x + y \leq 8$
   $x \geq 0$
   $y \geq 0$
   Maka nilai maksimum fungsi sasaran $x + 2y$ pada himpunan penyelesaian x, y bilangan real ialah . . . .
   a. 6
   b. 7
   c. 8
   d. 9
   e. 4

Latihan Semester pada tiap akhir semester untuk menguji kemampuan siswa dalam satu semester.

Daftar Simbol

Notasi	Keterangan	Halaman
$\geq$	Lebih dari atau sama dengan	2, 7, 8, 9
$\leq$	Kurang dari atau sama dengan	2, 7, 8, 9
$>$	Lebih dari	2, 93, 95
$<$	Kurang dari	2, 93, 95
$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$	Matriks	25, 27, 29, 30, 31, 32, 34, 35, 40, 45, 51, 52, 55, 57, 58, 59, 62, 63
$\lim\limits_{n \to \infty}$	Limit *n* menuju tak hingga	96, 97
A^t	Transpose matriks	29, 34
$\lvert A \rvert$	Determinan matriks A	51, 52, 53, 59, 65
I	Matriks identitas	30
A^{-1}	Invers matriks A	55, 57, 59, 60
U_n	Suku ke-*n*	81, 82, 85, 86, 90, 100
b	Beda barisan aritmetika	81, 82, 90
a	Suku pertama barisan	81, 82, 86, 90, 97
r	Rasio barisan geometri	85, 86, 93, 97, 103
S_n	Jumlah *n* suku pertama deret	90, 93, 97
Σ	Sigma, jumlah dari	100,101
$\lvert \quad \rvert$	Harga mutlak, nilai mutlak	95

Daftar Isi

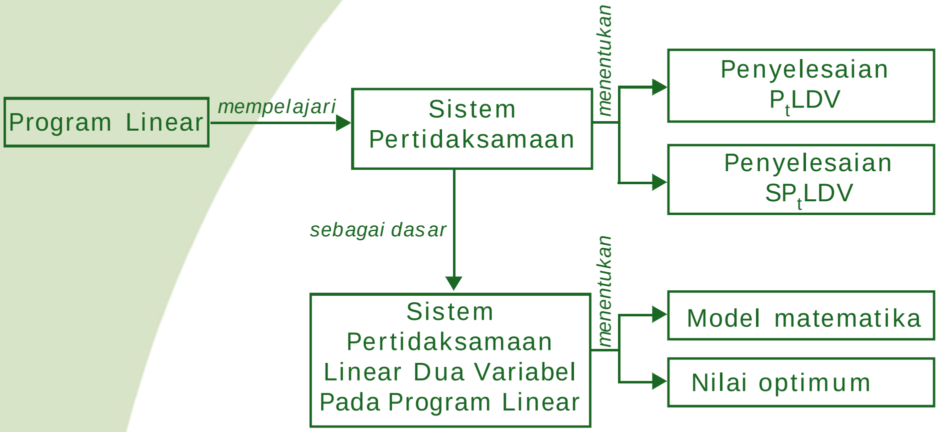
Bab 1

Program Linear

Salah satu ukuran untuk menentukan baik tidaknya suatu model matematis adalah kemampuan model tersebut membuat prediksi. Apabila sebuah model matematis dapat membantu membuat suatu prediksi yang lebih baik, maka prediksi yang dihasilkan akan sangat berarti. Dengan prediksi yang tepat maka seorang pialang bisa mendapatkan laba maksimum dalam melaksanakan kegiatannya.

Berikut ini akan kalian pelajari salah satu cara yang dapat digunakan untuk mengoptimumkan suatu model matematika dari masalah-masalah yang mungkin dialami oleh para pelaku produksi dalam kehidupan.

Peta konsep berikut memudahkan kalian dalam mempelajari seluruh materi pada bab ini.



Dalam bab ini terdapat beberapa **kata kunci** yang perlu kalian ketahui.

1. Pertidaksamaan linear
2. Nilai optimum
3. Bentuk objektif
4. Fungsi tujuan

Dalam mempelajari pokok bahasan program linear ini, cara menentukan himpunan penyelesaian suatu sistem pertidaksamaan linear dua peubah merupakan prasyarat yang harus dikuasai. Oleh karena itu perlu dipelajari kembali sistem pertidaksamaan linear berikut.

A. Sistem Pertidaksamaan Linear Dua Variabel

Pertidaksamaan linear adalah pertidaksamaan yang peubah bebasnya berbentuk linear (pangkat satu). Kalian tentu masih ingat bentuk-bentuk di bawah ini.

1. $2x \geq 4$; pertidaksamaan linear satu peubah
2. $3x + y < 0$; pertidaksamaan linear dua peubah
3. $x - 2y \leq 3$; pertidaksamaan linear dua peubah
4. $x + y - 2z > 0$; pertidaksamaan linear tiga peubah

Dalam bab ini kita hanya akan mempelajari pertidaksamaan linear dengan dua peubah. Gabungan dari dua atau lebih pertidaksamaan linear dua peubah disebut sistem pertidaksamaan linear dua peubah.

Contoh sistem pertidaksamaan linear dua peubah adalah sebagai berikut.

$3x + 8y \geq 24$,

$x + y \geq 4$,

$x \geq 0$,

$y \geq 0$.

Sudut Matematika

Meningkatkan Sikap Kritis Siswa

Apakah perbedaan linier dan linear? Jelaskan.

1. Daerah Himpunan Penyelesaian Pertidaksamaan Linear Dua Peubah

Penyelesaian suatu pertidaksamaan linear dua peubah adalah pasangan berurut (x,y) yang memenuhi pertidaksamaan linear tersebut. Himpunan penyelesaian tersebut dinyatakan dengan suatu daerah pada bidang kartesius (bidang XOY) yang diarsir.

Untuk lebih memahami daerah himpunan penyelesaian pertidaksamaan linear dua peubah, pelajari contoh-contoh berikut.

Contoh 1.1

Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan linear di bawah ini.

a. $2x + 3y \geq 12$
b. $2x - 5y > 20$
c. $4x - 3y < 12$
d. $5x + 3y \leq 15$

Penyelesaian:

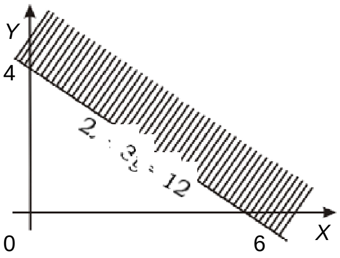
a. Mula-mula dilukis garis $2x + 3y = 12$ dengan menghubungkan titik potong garis dengan sumbu X dan sumbu Y.
Titik potong garis dengan sumbu X berarti $y = 0$, diperoleh $x = 6$ (titik (6,0)).
Titik potong garis dengan sumbu Y berarti $x = 0$, diperoleh $y = 4$ (titik (0,4)).
Garis $2x + 3y = 12$ tersebut membagi bidang kartesius menjadi dua bagian. Untuk menentukan daerah yang merupakan himpunan penyelesaian dilakukan dengan mengambil salah satu titik uji dari salah satu sisi daerah. Misalkan diambil titik (0,0), kemudian disubstitusikan ke pertidaksamaan sehingga diperoleh:

$2\times0 + 3\times0 < 12$

$0 < 12$

Jadi $0 \geq 12$ salah, artinya tidak dipenuhi sebagai daerah penyelesaian.

Jadi, daerah penyelesaiannya adalah daerah yang tidak memuat titik (0,0), yaitu daerah yang diarsir pada gambar di bawah ini.

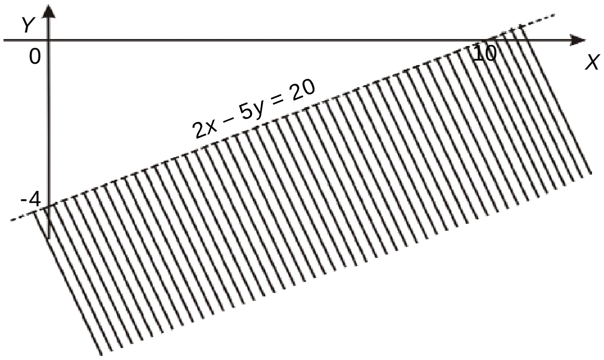


b. Mula-mula dilukis garis $2x - 5y = 20$ dengan menghubungkan titik potong garis di sumbu X dan sumbu Y.
Titik potong garis dengan sumbu $X \Rightarrow y = 0$, diperoleh $x = 10$ (titik (10,0))
Titik potong garis dengan sumbu $Y \Rightarrow x = 0$, diperoleh $y = -4$ (titik (0,–4))
Garis $2x - 5y = 20$ tersebut membagi bidang kartesius menjadi dua bagian. Untuk menentukan daerah yang merupakan himpunan penyelesaian dilakukan dengan mengambil titik uji dari salah satu sisi daerah. Misalkan diambil titik (0,0), kemudian disubstitusikan ke pertidaksamaan sehingga diperoleh:

$2\times0 - 5\times0 > 20$

$0 > 20$ (salah), artinya tidak dipenuhi.

Jadi, daerah penyelesaiannya adalah daerah yang tidak memuat titik (0,0), yaitu daerah yang diarsir pada gambar di samping.



c. Mula-mula dilukis garis $4x - 3y = 12$ dengan menghubungkan titik potong garis di sumbu X dan sumbu Y.

Titik potong garis dengan sumbu X maka $y = 0$ diperoleh $x = 3$ (titik (3,0))

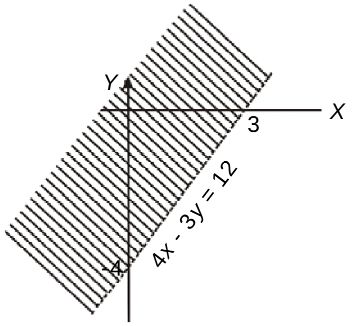
Titik potong garis dengan sumbu Y maka $x = 0$ diperoleh $y = -4$ (titik (0,–4))

Garis $4x - 3y = 12$ tersebut membagi bidang kartesius menjadi dua bagian. Untuk menentukan daerah yang merupakan himpunan penyelesaian dilakukan dengan mengambil salah satu titik uji dari salah satu sisi daerah. Misalkan diambil titik (0,0), kemudian disubstitusikan ke pertidaksamaan sehingga diperoleh:

$4 \times 0 - 3 \times 0 < 12$

$0 < 12$ (benar), artinya dipenuhi sebagai daerah penyelesaian.

Jadi, daerah penyelesaiannya adalah daerah yang memuat titik (0,0), yaitu daerah yang diarsir pada gambar di bawah.

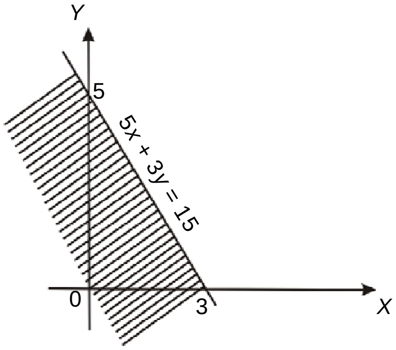


Sudut Matematika

Meningkatkan Sikap Kritis Siswa

Menurut kalian, selain digunakan dalam bidang ekonomi, digunakan dalam bidang apakah program linear itu?

d. Mula-mula dilukis garis $5x + 3y = 15$ dengan menghubungkan titik potong garis di sumbu X dan sumbu Y.
   Titik potong garis dengan sumbu X maka $y = 0$, diperoleh $x = 3$ (titik (3,0))
   Titik potong garis dengan sumbu Y maka $x = 0$, diperoleh $y = 5$ (titik (0,5))
   Garis $5x + 3y = 15$ tersebut membagi bidang kartesius menjadi dua bagian. Untuk menentukan daerah yang merupakan himpunan penyelesaian dilakukan dengan mengambil salah satu titik uji dari salah satu sisi daerah. Misalkan diambil titik (0,0), kemudian disubstitusikan ke pertidaksamaan sehingga diperoleh:
   $5 \times 0 + 3 \times 0 \leq 15$
   $0 \leq 15$ (benar), artinya dipenuhi.
   Jadi, daerah penyelesaiannya adalah daerah yang memuat titik (0,0), yaitu daerah yang diarsir pada gambar di samping.



Berdasarkan contoh di atas, cara menentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan linear dengan dua peubah dapat dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Lukislah garis $ax + by = c$ pada bidang kartesius dengan menghubungkan titik potong garis pada sumbu X di titik $(\frac{c}{a},0)$ dan pada sumbu Y di titik $(0,\frac{c}{b})$.
2. Selidiki sebuah titik uji yang terletak di luar garis dengan cara menyubstitusikannya pada pertidaksamaan. Jika pertidaksamaan dipenuhi (benar), maka daerah yang memuat titik tersebut merupakan daerah himpunan penyelesaian. Jika pertidaksamaan tidak dipenuhi (salah), maka daerah yang tidak memuat titik uji merupakan daerah himpunan penyelesaian.

Kegiatan Menulis 1.1

Setelah mempelajari contoh di atas, cara menentukan daerah himpunan penyelesaian tanpa titik uji secara cepat dapat dilihat pada tabel di bawah.

Pertidaksamaan	**$b > 0$**	**$b < 0$**	**$b = 0$**
$ax + by \leq c$	Daerah himpunan penyelesaian berada di bawah garis $ax + by = c$	Daerah himpunan penyelesaian berada di atas garis $ax + by = c$	Daerah himpunan penyelesaian berada di kiri garis $x = c/a$
$ax + by \geq c$	Daerah himpunan penyelesaian berada di atas garis $ax + by = c$	Daerah himpunan penyelesaian berada di bawah garis $ax + by = c$	Daerah himpunan penyelesaian berada di kanan garis $x = c/a$

Dari tabel di atas, apa yang dapat kalian simpulkan?

Latihan 1.1

Lukiskan daerah himpunan penyelesaian setiap pertidaksamaan linear berikut.

1. $x > 1$
2. $y < -3$
3. $x + y \geq 4$
4. $2x - y \leq 2$
5. $3x + 2y < 6$
6. $2x + 7y > 14$
7. $x - 3y \leq 9$
8. $2x + 5y \geq 10$
9. $-2x + y \leq 4$
10. $8x + 3y \geq 48$

2. Daerah Penyelesaian Sistem Pertidaksamaan Linear

a. Menentukan Daerah Penyelesaian Sistem Pertidaksamaan Linear

Himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linear dua peubah adalah himpunan titik-titik (pasangan berurut (x,y)) dalam bidang kartesius yang memenuhi semua pertidaksamaan linear dalam sistem tersebut. Sehingga daerah himpunan penyelesaiannya merupakan irisan himpunan-himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan dalam sistem pertidaksamaan linear dua peubah itu. Agar kalian lebih mudah dalam memahami daerah penyelesaian dari sistem pertidak-samaan linear dua peubah, perhatikan contoh-contoh di bawah ini.

Contoh 1.2

Tentukan daerah himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan berikut.

a. $3x + 5y \leq 15$
$x \geq 0$
$y \geq 0$

b. $x + y \leq 6$
$2x + 3y \leq 12$
$x \geq 1$
$y \geq 2$

Penyelesaian:

a. Mula-mula gambar garis $3x + 5y = 15$, $x = 0$, dan $y = 0$

Untuk $3x + 5y \leq 15$

Pilih titik (0,0), kemudian substitusikan ke pertidaksamaan sehingga diperoleh:

$3 \times 0 + 5 \times 0 \leq 15$

$0 \leq 15$ (benar), artinya dipenuhi

Jadi, daerah penyelesaiannya adalah daerah yang memuat titik (0,0)

Untuk $x \geq 0$, pilih titik (1,1) kemudian disubstitusikan ke pertidaksamaan sehingga diperoleh:

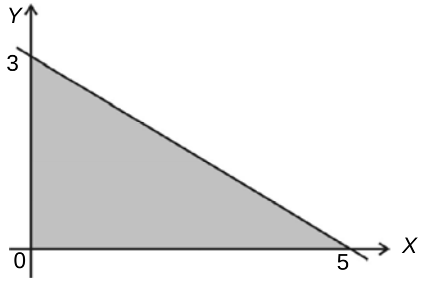
$1 \geq 0$ (benar), artinya dipenuhi.

Jadi, daerah penyelesaiannya adalah daerah yang memuat titik (1,1)

Untuk $y \geq 0$, pilih titik (1,1) kemudian substitusikan ke pertidaksamaan sehingga diperoleh:

$1 \geq 0$ (benar), artinya dipenuhi.

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah daerah yang memuat titik (1,1).



Daerah himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan merupakan irisan dari ketiga daerah himpunan penyelesaian pertidaksamaan di atas, yaitu seperti terlihat pada gambar berikut ini (daerah yang diarsir).

b. Mula-mula gambar garis $x + y = 6$, $2x + 3y = 12$, $x = 1$, dan $y = 2$. Untuk $x + y \leq 6$, pilih titik (0, 0), kemudian substitusikan ke pertidaksamaan sehingga diperoleh:

$1 \times 0 + 1 \times 0 \leq 6$

$0 \leq 6$ (benar), artinya dipenuhi.

Jadi, daerah penyelesaiannya adalah daerah yang memuat titik (0,0).

Untuk $2x + 3y \leq 12$, pilih titik (0,0), kemudian substitusikan ke pertidak-samaan sehingga diperoleh:

$2 \times 0 + 3 \times 0 \leq 12$

$0 \leq 12$ (benar), artinya dipenuhi.

Jadi, daerah penyelesaiannya adalah daerah yang memuat titik (0,0).

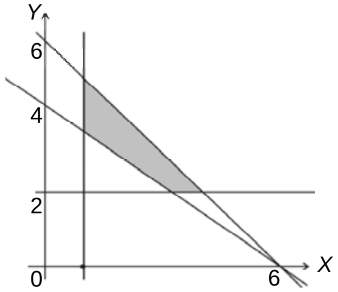
Untuk $x \geq 1$, pilih titik (2,1) kemudian disubstitusikan ke pertidaksamaan sehingga diperoleh $2 \geq 1$ (benar), artinya dipenuhi.

Jadi, daerah penyelesaiannya adalah daerah yang memuat titik (2,1).

Untuk $y \geq 2$, pilih titik (1,3) kemudian substitusikan ke pertidaksamaan sehingga diperoleh $3 \geq 2$ (benar), artinya dipenuhi.

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah daerah yang memuat titik (1,3).

Daerah himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan tersebut merupakan irisan dari ketiga daerah himpunan penyelesaian pertidaksamaan di atas, yang seperti terlihat pada gambar di samping (daerah yang diarsir)



Kegiatan Menulis 1.2

Berdasar contoh di atas, bagaimana langkah-langkah menentukan daerah himpunan penyelesaian dari sebuah sistem pertidaksamaan linear dua peubah?

b. Menentukan Sistem Pertidaksamaan jika Daerah Himpunan Penyelesaian Sistem Pertidaksamaan Linear Dua Peubah Diketahui

Cara menentukan daerah himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linear dua peubah telah dipelajari sebelumnya. Sekarang bagaimana menentukan sistem pertidaksamaan jika daerah himpunan penyelesaiannya yang diketahui? Untuk itu simaklah beberapa contoh di bawah ini.

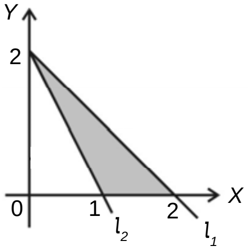
Infomedia

Sistem pertidaksamaan linear merupakan irisan dari beberapa pertidaksamaan linear.

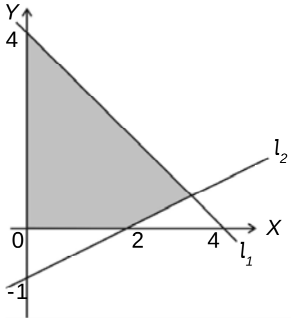
Contoh 1.3

Daerah yang diarsir di bawah ini merupakan daerah himpunan penyelesaiaan dari suatu sistem pertidaksamaan linear dua peubah. Tentukanlah sistem pertidaksamaan tersebut.

a.



b.



Penyelesaian:

a. Garis l_1 melalui titik (2,0) dan (0,2), persamaan garis l_1 adalah:

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=1 \Leftrightarrow x+y=2$$

Garis l_2 melaui titik (1,0) dan (0,2), persamaan garis l_2 adalah:

$$\frac{x}{1}+\frac{y}{2}=1 \Leftrightarrow 2x+y=2$$

Dari gambar terlihat bahwa daerah himpunan penyelesaian (yang diarsir) berada di bawah garis l_1, di atas garis l_2, di kanan sumbu *Y,* dan di atas sumbu *X.* Sistem pertidaksamaannya adalah:

$x + y \leq 2$, $2x + y \geq 2$, $x \geq 0$, dan $y \geq 0$

b. Garis l_1 melalui titik (4,0) dan (0,4), persamaan garis l_1 adalah:

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1 \Leftrightarrow x + y = 4$$

Garis l_2 melalui titik (2,0) dan (0,–1), persamaan garis l_2 adalah:

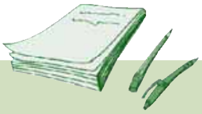
$$\frac{x}{2} + \frac{y}{-1} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad -x + 2y = -2$$

$$\Leftrightarrow \quad x - 2y = 2$$

Dari gambar terlihat bahwa daerah himpunan penyelesaian (yang diarsir) berada di bawah garis l_1, di atas garis l_2, di kanan sumbu *Y*, dan di atas sumbu *X*. Sistem pertidaksamaannya adalah:

$x + y \leq 4$, $x - 2y \leq 2$, $x \geq 0$, dan $y \geq 0$

Kegiatan Menulis 1.3

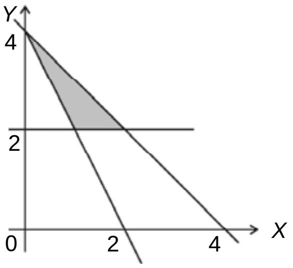


Setelah mempelajari contoh di atas, coba kalian simpulkan langkah-langkah menentukan sistem pertidaksamaan jika daerah himpunan penyelesaiannya yang diketahui?

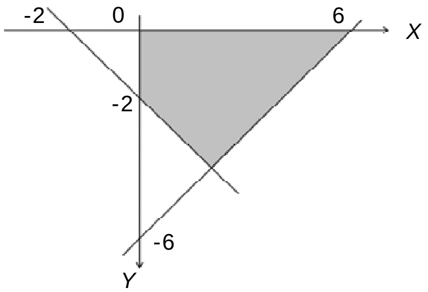
Latihan 1.2

1. Tentukan daerah himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan berikut.
   - a. $3x + 8y \geq 24$, $x + y \geq 4$, $x \geq 0$ dan $y \geq 0$
   - b. $x + y \geq 3$, $x + 2y \geq 4$, $x \geq 1$, dan $y \geq 0$
   - c. $x + 2y < 8$, $4x + 3y < 24$, $x \geq 0$, dan $y \geq 1$
   - d. $2x + y < 40$, $x + 2y < 40$, $x \geq 0$, dan $y \geq 0$
   - e. $x + 2y \geq 10$, $x + y \geq 8$, dan $x - y \geq -4$
   - f. $x + 3y \geq 30$, $5x + y \geq 50$, dan $5x + 3y \geq 90$
   - g. $x + y \geq 5$, $0 < y < 3$, dan $x \geq 0$
   - h. $1 < x < 4$ dan $0 < y < 4$
   - i. $x + y < 20$, $0 < y < 10$, dan $x \geq 0$
   - j. $y - x \geq 4$, $2x + y < 8$, $0 < x < 6$, dan $y \geq 0$
2. Tentukan sistem pertidaksamaan yang himpunan penyelesaiannya adalah daerah yang diarsir pada gambar-gambar di bawah ini.

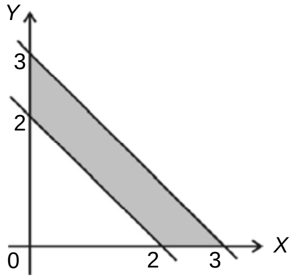
a.



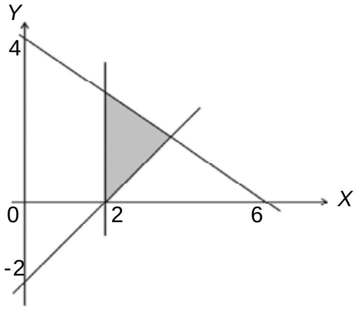
c.



b.



d.



B. Merancang Model Matematika Masalah Program Linear

Pada awalnya program linear dikembangkan oleh W.W. Leontife, seorang ahli ekonomi, yang berupa analisis dari metode input-output (metode masukan dan keluaran). Kemudian dilanjutkan Hitchock (1941) dan Koopmans (1947) yang mempelajari masalah transportasi. Selanjutnya G.B. Dantzig (1948) memperkenalkan sebuah metode yang dapat digunakan untuk menentukan solusi optimum yang sering disebut dengan **metode simpleks**.

Dalam sebuah perusahaan sering menggunakan program linear ini untuk menyelesaikan masalah pengoptimalan yang mereka hadapi, seperti pemaksimalan keuntungan, peminimuman biaya produksi dan sebagainya. Misalkan sebuah perusahaan roti ingin memproduksi dua jenis roti. Setiap jenis roti memerlukan bahan tepung dan mentega. Jenis roti I membutuhkan 200 gram tepung dan 75 gram mentega, sedang jenis roti II membutuhkan 100 gram tepung dan 50 gram mentega. Jika tersedia 100 kg tepung dan 25 kg mentega berapa roti jenis I dan jenis II yang dapat dibuat supaya memperoleh jumlah yang sebanyak-banyaknya, sedang untuk bahan yang lain cukup tersedia?

Contoh di atas adalah salah satu persoalan yang menyangkut program linear. Untuk menyelesaikan masalah tersebut, soal harus diterjemahkan lebih dahulu dalam model matematika.

1. Model Matematika

Dalam menyelesaikan masalah yang menyangkut program linear, model matematika sangat dibutuhkan. Dalam model matematika nantinya akan terlihat fungsi tujuan dan fungsi batasan. Fungsi tujuan adalah fungsi yang menunjukkan sasaran dari pengoptimalan yang mungkin dicapai berdasar batasan-batasan yang ada. Agar kalian lebih memahami tentang model matematika dan cara pembuatannya perhatikan beberapa contoh berikut ini.

Contoh 1.4

a. Seorang pedagang sepeda ingin membeli sepeda balap dan sepeda motor sebanyak 25 buah untuk persediaan. Harga sebuah sepeda balap Rp1.500.000,00 dan sepeda motor Rp8.000.000,00. Jika modal yang dimiliki Rp100.000.000,00 buatlah model matematika dari permasalahan tersebut.

b. Ali menjual es krim dalam termos yang paling banyak memuat 500 bungkus. Harga es krim jenis I Rp2.000,00 dan jenis II Rp1.000,00. Jika modal yang tersedia Rp1.100.000,00 dan laba masing-masing jenis es krim Rp200,00 dan Rp250,00 buatlah model matematika untuk permasalahan tersebut.

c. Makanan A dibuat dari 4 ons tepung dan 2 ons mentega, sedangkan makanan B dibuat dari 3 ons tepung dan 3 ons mentega. Pengusaha makanan mempunyai 6 kg tepung dan 4,5 kg mentega. Jika harga makanan A Rp5.000,00 per buah dan makanan B Rp3.000,00 per buah, tentukan model matematika dari permasalahan tersebut.

Penyelesaian:

Untuk memudahkan dalam membuat model matematika dari permasalahan di atas, terlebih dahulu disusun dalam sebuah tabel yang menggambarkan unsur-unsur yang ada.

a. Misalkan banyaknya sepeda balap yang mungkin dibeli x buah dan sepeda motor y buah, dengan demikian tabel pemodelannya ditunjukkan sebagai berikut.

	Sepeda Balap (x)	**Sepeda Motor (y)**	**Modal**	**Pertidak-samaan**
Harga (dalam ratusan ribu)	15	80	1000	$15x + 80y \leq 1000$
Persediaan	25			$x + y \leq 25$

Model matematika dari permasalahan di atas adalah:
$15x + 80y \leq 1000$
$x + y \leq 25$
Karena banyak sepeda tidak mungkin negatif maka harus ditambahkan syarat nonnegatif.
$x \geq 0$
$y \geq 0$, dengan $x, y \in$ cacah.

b. Misalkan banyaknya es krim jenis I yang mungkin dijual x buah dan es krim jenis II y buah. Tabel pemodelannya sebagai berikut.

	Es krim Jenis I (x)	**Es Krim Jenis II (y)**	**Modal**	**Pertidak-samaan**
Harga(dalam ribuan)	2.000	1.500	1.100.000	$2000x + 1500y \leq 1.100.000$
Keuntungan	200	150		
Kapasitas termos	500			$x + y \leq 500$

Model matematika dari permasalahan di atas adalah:
$2000x + 1500y \leq 1.100.000$
$x + y \leq 500$
Karena banyak es krim tidak mungkin negatif, maka harus diberikan syarat bahwa:
$x \geq 0$
$y \geq 0$,
(syarat nonnegatif)
Dengan fungsi tujuan memaksimumkan $200x + 150y$; $x, y \in$ cacah.

c. Misalkan banyaknya makanan A yang mungkin dibuat x buah dan makanan B y buah. Tabel pemodelan masalahnya sebagai berikut.

Bahan	Makanan A (x)	Makanan B (y)	Persediaan Bahan	Pertidaksamaan
Tepung	4 ons	2 ons	60 ons	$4x + 2y \leq 60$
Mentega	3 ons	3 ons	45 ons	$3x + 3y \leq 45$
Harga	Rp5.000,00	Rp3.000,00		$5.000x+3.000y$

Model matematika dari permasalahan tersebut adalah:

$4x + 2y \leq 60$

$3x + 3y \leq 45$

Karena banyak makanan tidak mungkin negatif maka harus ditambahkan syarat nonnegatif yaitu:

$x, y \geq 0$

(syarat nonnegatif)

Dengan fungsi tujuan memaksimumkan $5.000x + 3.000y$; $x, y \in$ cacah.

2. Nilai Optimum Suatu Fungsi Objektif

a. Pengertian Fungsi Objektif

Dari Contoh 1.4b, diperoleh model matematika sebagai berikut.

$$\left.\begin{aligned} &2.000x + 1.500y \leq 1.100.000 \\ &x + y \leq 500 \\ &x \geq 0 \\ &y \geq 0 \end{aligned}\right\} \quad . . . . (1)$$

(syarat nonnegatif)

dengan fungsi tujuan memaksimumkan $200x + 150y$ . . . (2); $x, y \in$ cacah.

Persamaan (1) disebut fungsi batasan atau fungsi kendala, sedang persamaan (2) disebut fungsi tujuan.

Coba kalian baca lagi Contoh 1.4, mana yang merupakan fungsi batasan dan mana yang merupakan fungsi tujuan?

Dari contoh-contoh di atas terdapat fungsi yang dioptimumkan (dimaksimumkan atau diminimumkan). Fungsi yang demikian itu sering disebut dengan fungsi objektif. Jadi secara umum bentuk objektif dapat ditulis sebagai berikut.

$ax + by$ . . . . (3)

b. Menentukan Nilai Optimum Fungsi Objektif

Dalam menentukan nilai optimum dari suatu fungsi objektif pada umumnya sering menggunakan metode grafik dan metode simpleks. Metode grafik sering digunakan untuk menyelesaikan masalah program linear dua peubah, karena metode grafik relatif mudah dan lebih praktis. Sedangkan metode simpleks pada umumnya digunakan untuk memecahkan masalah program linear tiga peubah atau lebih. Karena kita mempelajari program linear dua peubah maka metode yang digunakan adalah metode grafik.

Langkah-langkah yang harus ditempuh dalam menyelesaikan persoalan program linear dengan menggunakan metode grafik adalah sebagai berikut.

1) Mengubah soal cerita menjadi model matematika dengan mengidentifikasi fungsi batasan atau kendala dan fungsi tujuannya.
2) Menggambar semua garis yang merupakan fungsi kendala dalam koordinat kartesius.
3) Menentukan daerah himpunan penyelesaian yang memenuhi semua fungsi kendala dengan mengarsir daerah himpunan penyelesaian tersebut.
4) Menentukan nilai optimum dari fungsi tujuan yang diketahui.

Dalam menetukan nilai optimum ini dapat dilakukan dengan dua cara yaitu dengan metode titik sudut dan metode garis selidik.

Contoh 1.5

Dari Contoh 1.4c, diperoleh model matematika sebagai berikut.

$4x + 2y \leq 60$

$3x + 3y \leq 45$

$x, y \geq 0$

(syarat nonnegatif)

dengan fungsi tujuan $5.000x + 3.000y$; $x, y \in$ cacah.

Tentukan nilai x dan y sehingga bentuk $5.000x + 3.000y$, maksimum.

Penyelesaian:

Cara I (menggambar semua pertidaksamaan)

Langkah 1

Dari soal telah diketahui model matematikanya sebagai berikut.

$4x + 2y \leq 60$

$3x + 3y \leq 45$

$x, y \geq 0$

dengan fungsi tujuan $5.000x + 3.000y$; $x, y \in$ cacah.

Langkah 2

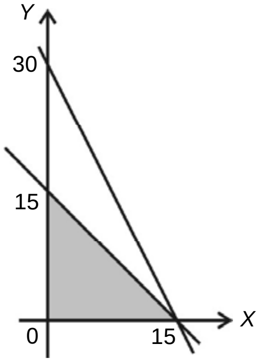
Menggambar semua garis dari fungsi kendala.

Langkah 3

Menentukan daerah himpunan penyelesaian, sehingga diperoleh daerah yang diarsir.

Langkah 4

Menentukan nilai optimum fungsi tujuan 5.000x + 3.000y, sebagai berikut.



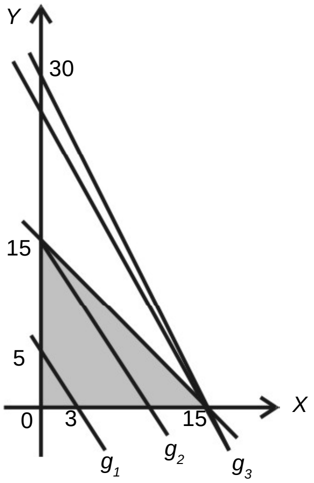
Cara I (dengan metode titik sudut)

Titik	F = 5.000x + 3.000y
(0,0) (15,0) (0,15)	5.000(0) + 3.000(0) = 0 5.000(15) + 3.000(0) = 75.000 5.000(0) + 3.000(15) = 45.000

Berdasarkan hasil pada perhitungan tabel di atas nilai maksimum fungsi objektif 5.000x + 3.000y adalah 75.000 dan dicapai dititik (15,0). Dari sini dapat disimpulkan agar pembuat roti memperoleh pendapatan yang paling besar, maka dia harus membuat 15 buah makanan A dan tidak memproduksi makanan B.

Cara II (metode garis selidik)

Cara lain untuk menentukan nilai optimum suatu program linear adalah menggunakan garis selidik. Garis selidik (k) dibuat dari fungsi tujuan program linear tersebut. Dengan menggeser-geser garis tersebut pada titik pojok-titik pojok daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan linear tersebut.



Dari soal di atas dapat dibuat tabel sebagai berikut.

Cara ini dilakukan dengan menggambar garis 5.000x + 3.000y = k untuk beberapa nilai k, sehingga garis tersebut menyinggung daerah himpunan penyelesaian dengan nilai k

terbesar. Misalkan k = 15.000 sehingga diperoleh persamaan garis 5.000x + 3.000y = 15.000 atau 5x + 3y = 15. Kemudian gambarkan garis tersebut pada gambar di atas, dari gambar tampak lebih dari satu titik pada garis tersebut yang menyinggung daerah himpunan penyelesaian. Oleh karena itu garis 5x + 3y = 15 kita geser ke kanan. Misalkan k = 45.000, maka persamaan garis menjadi 5x + 3y = 45 dan diwakili oleh garis g_2 pada gambar. Tampak masih terdapat lebih satu titik pada garis tersebut yang menyinggung daerah penyelesaian. Kemudian garis 5x + 3y = 45 kita geser lagi menjadi garis g_3, yang menyinggung daerah penyelesaian di (15,0) dengan persamaan 5x + 3y = 75. Artinya, bentuk objektif tersebut akan maksimum untuk x = 15 dan y = 0 dengan nilai maksimum 5.000(15) + 3.000(0) = 75.000.

Kegiatan Menulis 1.4

Coba kalian simpulkan langkah-langkah menentukan nilai optimum dengan menggunakan garis selidik! Bagaimana untuk masalah meminimumkan?

Latihan 1.3

1. Sebuah pesawat penumpang mempunyai tempat duduk tidak lebih dari 50 penumpang yang terdiri atas dua kelas. Setiap penumpang kelas utama boleh membawa bagasi maksimum 30 kg dan untuk kelas ekonomi maksimum 20 kg. Pesawat hanya dapat membawa bagasi 1.000 kg. Harga tiket kelas utama Rp150.000,00 dan kelas ekonomi Rp100.000,00. Agar pendapatan dari penjualan tiket maksimum, tentukan banyaknya tempat duduk untuk masing-masing kelas yang harus tersedia.
2. Untuk menghasilkan barang A seharga Rp2.000,00 per buah diperlukan bahan baku 30 kg dan waktu kerja mesin 18 jam. Sedangkan barang B yang juga berharga Rp2.000,00 memerlukan bahan baku 20 kg dan waktu kerja mesin 24 jam. Tentukan nilai maksimum produk selama 720 jam dan jika bahan baku yang tersedia 750 kg.

3. Luas daerah parkir 360 m^2. Luas rata-rata untuk sebuah mobil 6 m^2 dan sebuah bus 24 m^2. Daerah tersebut hanya memuat tidak lebih dari 30 kendaraan. Tentukan jumlah uang maksimum yang dapat diperoleh tukang parkir jika biaya parkir sebuah mobil Rp500,00 dan untuk bus Rp1.000,00.
4. Dengan menggunakan dua macam tenda, 70 orang pramuka mengadakan kemah. Tenda pertama dapat menampung 7 orang, harganya Rp20.000,00. Tenaga kedua hanya menampung dua orang saja harganya Rp4.000,00. Banyaknya tenda yang dibutuhkan tidak lebih dari 19 buah. Berapa jumlah tenda pertama dan kedua yang harus dibeli agar pengeluaran seminim mungkin? Berapa biaya minimal untuk membeli tenda?
5. Seorang pedagang beras membeli beras jenis I dengan harga Rp2.000,00/kg dan beras jenis II Rp3.000,00/kg. Uang yang dimiliki pedagang tadi sebesar Rp500.000,00. Jika kiosnya hanya memuat 200 kg beras dan bila dijual lagi mendapat untung untuk jenis I Rp200,00/kg dan untung jenis II Rp250,00/kg, berapa laba maksimum yang diperoleh pedagang itu?

Refleksi

Buatlah rangkuman dari internet atau sumber lain berkaitan dengan materi program linear ini. Buatlah dalam bentuk laporan.

Rangkuman

1. Langkah-langkah menentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan linear dengan dua peubah:
   a. Lukislah garis $ax + by = c$ pada bidang kartesius dengan menghu-bungkan titik potong garis pada sumbu X di titik $(\frac{c}{a},0)$ dan pada sumbu Y di titik $(0,\frac{c}{b})$.

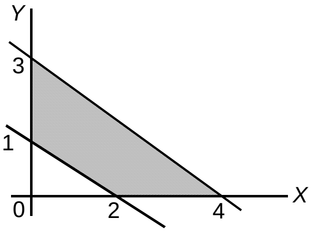
   b. Selidiki sebuah titik uji dengan cara mensubstitusikannya pada pertidaksamaan. Jika pertidaksamaan dipenuhi, maka daerah yang memuat titik uji tersebut merupakan daerah himpunan penyelesaian.

2. Daerah himpunan penyelesaian $ax + bx \leq c$, untuk:
   a. $b > 0$, daerah himpunan penyelesaian berada di bawah garis $ax + by = c$.
   b. $b < 0$, daerah himpunan penyelesaian berada di atas garis $ax + by = c$.
   c. $b = 0$, daerah himpunan penyelesaian berada di kiri garis $ax + by = c$.
3. Daerah himpunan penyelesaian $ax + bx \geq c$, untuk:
   a. $b > 0$, daerah himpunan penyelesaian berada di atas garis $ax + by = c$.
   b. $b < 0$, daerah himpunan penyelesaian berada di bawah garis $ax + by = c$.
   c. $b = 0$, daerah himpunan penyelesaian berada di kanan garis $ax + by = c$.
4. Langkah-langkah dalam menyelesaikan persoalan program linear dengan metode grafik, yaitu:
   a. Mengubah soal cerita menjadi model matematika.
   b. Menggambarkan semua garis yang merupakan fungsi kendala dalam koordinat kartesius.
   c. Menentukan daerah himpunan penyelesaian yang memenuhi semua fungsi kendala dengan mengarsir daerah himpunan penyelesaian tersebut.
   d. Menentukan nilai optimum dari fungsi tujuan yang diketahui.

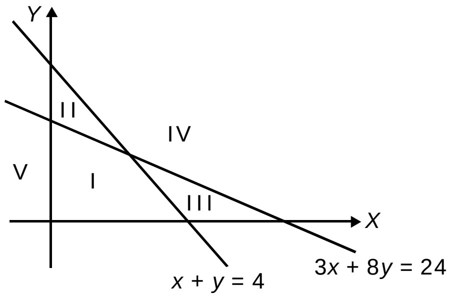
Uji Kompetensi

A. Berilah tanda silang (X) pada huruf *a*, *b*, *c*, *d*, atau *e* yang kalian anggap benar.

1. Daerah himpunan penyelesaian $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 8$, $2x + 5y \geq 10$, x, $y \in$ R. Maka nilai maksimum untuk $x + 2y$ pada himpunan penyelesaian tersebut adalah . . . .
   a. 20
   b. 16
   c. 8
   d. 5
   e. 4
2. Daerah himpunan penyelesaian untuk $2x + y \leq 40$, $x + 2y \leq 40$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ adalah berupa . . . .
   a. trapesium
   b. persegi panjang
   c. segi empat
   d. segitiga
   e. persegi
3. Daerah yang diarsir pada gambar di samping adalah himpunan jawaban dari . . . .



   a. $\{(x,y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x + 2y \leq 2, 3x + 4y \leq 12\}$
   b. $\{(x,y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x + 2y \geq 2, 3x + 4y \leq 12\}$
   c. $\{(x,y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x + 2y \geq 2, 3x + 4y \geq 12\}$
   d. $\{(x,y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x + 2y \leq 2, 3x + 4y \geq 12\}$
   e. $\{(x,y) \mid x \leq 0, y \leq 0, x + 2y \geq 2, 3x + 4y \geq 12\}$
4. Daerah penyelesaian yang memenuhi sistem pertidaksamaan:
   $3x + 8y \geq 24$
   $x + y \geq 4$
   $x \geq 0$ dan $y \geq 0$
   x, $y \in$ R adalah . . . .
   a. I
   b. II
   c. III
   d. IV
   e. V

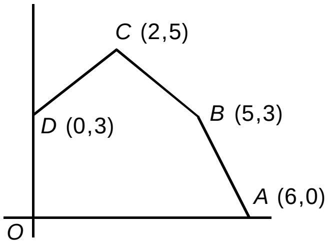


5. Titik berikut ini yang merupakan anggota himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linear: $x + 3y \geq 30$, $5x + y \geq 50$ dan $5x + 3y \geq 90$ adalah . . . .
   a. (10,12)　　d. (20,3)
   b. (5,20)　　e. (25,2)
   c. (15,5)

6. Nilai minimum dari $2x + 3y$ pada himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linear $x + y \geq 3$ dan $x + 2y \geq 6$ adalah . . . .
   a. 3　　d. 7
   b. 5　　e. 8
   c. 9

7. Suatu masalah dalam program linear setelah diterjemahkan ke dalam model matematika adalah sebagai berikut: $x + y \leq 12$, $x + 2y \leq 16$, $x \geq 0$ dan $y \geq 0$. Jika fungsi objektif $2x + 5y = k$, maka nilai optimum adalah . . . .
   a. 52　　d. 24
   b. 40　　e. 12
   c. 36

8. Sebuah lapangan parkir dapat memuat sebanyak-banyaknya 15 mobil. Setiap tempat parkir 3 mobil, hanya dapat dipakai parkir untuk sebuah bus saja. Jika banyaknya mobil x dan banyaknya bus y, maka model matematika dari persoalan tersebut di atas adalah . . . .
   a. $x \geq 0$, $y \geq 0$; $x + 3y \leq 15$
   b. $x \geq 0$, $y \geq 0$; $x + 2y \leq 15$
   c. $x \geq 0$, $y \geq 0$; $3x + y \leq 15$
   d. $x \geq 0$, $y \geq 0$; $3x - y \leq 15$
   e. $x \geq 0$, $y \geq 0$; $x - 3y \leq 15$

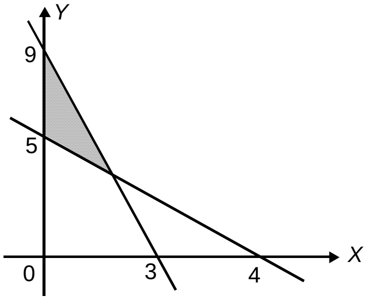
9. 

   Jika segi lima *OABCD* merupakan himpunan penyelesaian program linear, maka maksimum fungsi sasaran $x + 3y$ terletak di titik . . . .
   a. *O*　　d. *C*
   b. *A*　　e. *D*
   c. *B*

10. Suatu perusahaan tas dan sepatu memerlukan 4 unsur x dan 6 unsur y per minggu untuk masing-masing hasil produksinya. Setiap tas memerlukan 2 unsur x dan 2 unsur y. Bila setiap tas untung Rp3.000,00 dan setiap sepatu untung Rp2.000,00, maka banyak tas dan sepatu yang dihasilkan per minggu agar diperoleh untung yang maksimal adalah . . . .
    a. 3 tas
    b. 4 tas
    c. 2 sepatu
    d. 3 sepatu
    e. 2 tas dan 1 sepatu

B. Jawablah pertanyaan-pertanyaan di bawah ini dengan benar.

1. Untuk membuat kue tersedia terigu sebanyak 1.750 gr dan 1.200 gr mentega. Untuk membuat kue A diperlukan 5 gr terigu dan 3 gr mentega, sedangkan untuk kue B diperlukan 5 gr mentega dan 4 gr terigu. Direncanakan akan dibuat x buah kue A dan y buah kue B. Tentukan model matematika dari persoalan tersebut.
2. Minuman A yang harganya Rp2.000,00 per botol dijual dengan laba Rp400,00 per botol, sedang minuman B yang harganya Rp1.000,00 per botol dijual dengan laba Rp300,00 per botol. Seorang pedagang minuman punya modal Rp800.000,00 dan kiosnya maksimum dapat menampung 500 botol minuman. Tentukan banyaknya minuman yang harus dia jual agar keuntungannya maksimal.
3. Tentukan sistem pertidaksamaan yang memenuhi daerah yang diarsir pada gambar di samping.

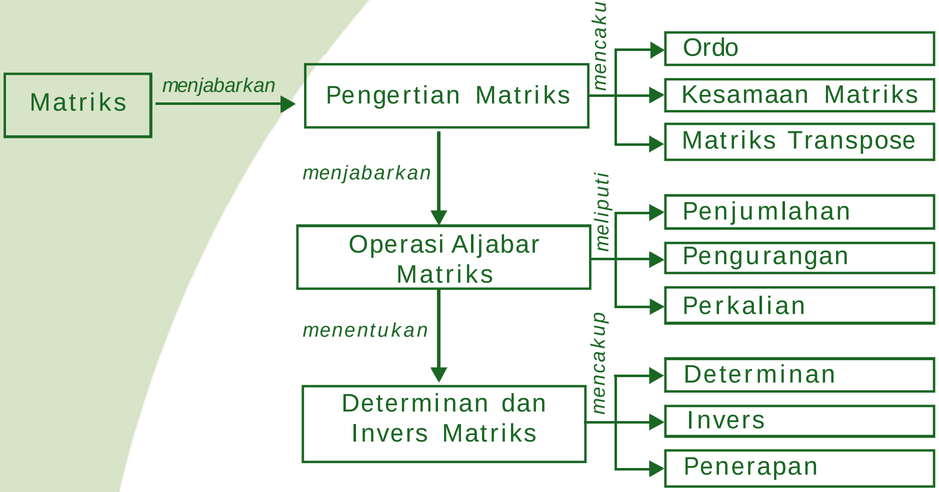


Bab 2

Matriks

Seringkali kita berbelanja secara borongan tanpa terlebih dahulu mengetahui harga untuk masing-masing barang. Di waktu lain terkadang kita mengulangi melakukan hal tersebut. Masalah ini bisa kita selesaikan dengan memanfaatkan penggunaan matriks. Dengan matriks, kita dapat menyusun harga dan jumlah barang-barang sebagai kombinasi baris dan kolom dalam matriks. Dengan sedikit operasi matriks, kita akan dapat menentukan harga masing-masing barang. Bagaimana hal itu bisa dilakukan? Agar dapat menjawab masalah-masalah seperti itu, pelajari materi matriks beriku ini. Kenalilah bagaimana matriks dengan sifat dan operasinya, determinan, invers, serta penerapannya.

Peta konsep berikut memudahkan kalian dalam mempelajari seluruh materi pada bab ini.



Dalam bab ini terdapat beberapa **kata kunci** yang perlu kalian ketahui.

1. Transpose
2. Determinan
3. Invers
4. Ordo

Kalian tentu ingat bagaimana membaca data dalam tabel. Pelajari pula bagaimana menyajikan data dalam tabel. Kedua materi itu akan sangat membantu kalian mempelajari materi matriks. Sebagai penerapan, bacalah materi bagaimana menyelesaikan sistem persamaan linear dua variabel.

A. Pengertian Matriks

Informasi seringkali disajikan dalam berbagai model. Sebagai contoh, hasil sementara Liga Indonesia 2005 disajikan dalam tabel berikut.

Contoh 2.1

Liga Indonesia 2005

Klasemen sementara
Wilayah I

1.	Persija	7	6	0	1	15/6	18
2.	Arema	6	4	1	1	14/4	13
3.	Persib	5	4	0	1	9/4	13
4.	PSMS	7	3	2	2	10/8	11
5.	PSIS	7	3	2	2	9/7	11
6.	PSDS	7	3	2	2	13/14	11
7.	Persikota	5	3	1	1	9/6	10

Sumber: *Suara Merdeka, 11 April 2005.*

Contoh 2.2

Jumlah siswa kelas XII yang tidak masuk pada hari Jumat, 25 Maret 2008.

Kelas	Sakit	Izin	Tanpa Keterangan
IIIA	0	4	2
IIIB	1	2	0
IIIC	2	5	3
IIID	3	1	1

Contoh 2.3

Koefisien dari variabel dalam suatu sistem persamaan.

Persamaan	Koefisien dari x	Koefisien dari y
$3x + 4y = 5$	3	4
$3x - 6y = 7$	2	–6

Apabila judul kolom dua baris tersebut dihilangkan dan susunan bilangan dibatasi dalam tanda kurung, maka disebut **matriks**. Matriks dari Contoh 2.1, 2.2, dan 2.3 adalah sebagai berikut.

$$\begin{pmatrix} 7 & 6 & 0 & 1 \\ 6 & 4 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 0 & 1 \\ 7 & 3 & 2 & 2 \\ 7 & 3 & 2 & 2 \\ 7 & 3 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$$

Setiap bilangan dalam matriks disebut **elemen** atau **unsur** matriks yang letaknya ditentukan oleh baris dan kolom di mana unsur tersebut berada. Misalnya dalam Contoh 2.3, angka 4 adalah unsur pada baris pertama dan kolom kedua. Sebuah matriks seringkali dinyatakan dengan huruf besar (kapital).

Misalnya: $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$

Matriks adalah susunan bilangan dalam bentuk persegi panjang yang disusun dalam baris dan kolom.

Bentuk umum suatu matriks:

$$A = \begin{array}{ll} \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{ij} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} \end{array}\right) & \begin{array}{l} \rightarrow \text{baris ke-1} \\ \rightarrow \text{baris ke-2} \\ \\ \rightarrow \text{baris ke-}i \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{kolom ke-1} & \text{kolom ke-2} & \text{kolom ke-}j \end{array} & \end{array}$$

Kegiatan Menulis 2.1

Dari siswa kelas XII di sekolah kalian, susunlah tabel jumlah siswa berdasarkan jenis kelamin dari masing-masing kelas! Susunlah matriks dari tabel tersebut. Berapa banyak baris dan kolomnya?

Latihan 2.1

1. Diberikan matriks: $P = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 7 & 10 & 17 \\ 3 & 0 & 9 & -6 & -15 \\ -4 & 3 & -1 & 16 & 2 \\ 1 & -5 & 12 & 4 & 14 \end{pmatrix}$
   a. Berapa banyak baris dan kolomnya?
   b. Sebutkan elemen-elemen pada:
      1) baris ke-3
      2) kolom ke-4
      3) baris ke-5
      4) kolom ke-1
   c. Jika a_{ij} mewakili elemen-elemen yang berbeda di baris ke-*i* dan kolom ke-*j*, sebutkan elemen-elemen:
      1) a_{32}
      2) a_{23}
      3) a_{42}
      4) a_{24}
      5) a_{33}
      6) a_{11}
2. Untuk matriks-matriks di bawah ini, berapa banyak baris dan kolomnya?
   a. $\begin{pmatrix} 1, & 3, & 0, & 5 \end{pmatrix}$
   b. $\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 2 \\ -2 & 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$
   c. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -2 \end{pmatrix}$
   d. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
   e. $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$
   f. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 & 4 & 10 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & -12 \\ -2 & 6 & 5 & 6 & 19 \end{pmatrix}$

3. Suatu industri rumah yang membuat dua jenis kue yaitu kue I dan kue II. Untuk menghasilkan kue I diperlukan 52 kg tepung, 90 butir telur, dan 14 kg gula. Sedangkan untuk membuat kue II diperlukan 46 kg tepung, 82 butir telur, dan 10 kg gula. Nyatakan uraian tersebut dalam bentuk matriks kemudian tentukan ukuran matriks dan masing-masing elemennya.
4. Untuk setiap sistem persamaan di bawah ini, tulislah matriks koefisien variabelnya.
   a. $3a - 5b = 12$
   $2a + 4b = 9$
   b. $3a - 12b = -4$
   $a - 6b = 18$
   c. $7a + 2b = 20$
   $7b = 14$
5. Carilah contoh-contoh informasi yang disajikan dalam bentuk matriks dalam surat kabar atau majalah.
6. Tulislah tabel berikut dalam bentuk matriks! Sebutkan banyak baris dan kolomnya.
   Resep biskuit (berat dalam satuan 25 gram dan susu dalam sendok makan)

	Gandum	**Mentega**	**Gula**	**Susu**	**Telur**
Biskuit mentega	12	4	4	0	0
Biskuit biasa	8	0	1	2	1

1. Ordo Matriks

Ordo suatu matriks ditentukan oleh banyaknya baris dikuti oleh banyaknya kolom.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Ordo matriks P adalah 3 × 3, karena terdiri atas 3 baris dan 3 kolom
Ordo matriks B adalah 1 × 3, karena terdiri atas 1 baris dan 3 kolom
Ordo matriks D adalah 3 × 1, karena terdiri atas 3 baris dan 1 kolom
Ordo matriks E adalah 2 × 2, karena terdiri atas 2 baris dan 2 kolom.

Apabila banyaknya baris dalam suatu matriks sama dengan banyaknya kolom, matriks tersebut disebut **matriks persegi**. *E* adalah matriks persegi berordo 2.

Latihan 2.2

1. Sebutkan ordo dari matriks berikut dan tentukan banyaknya elemen.

a. $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 9 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 2 & 0 & 10 \\ 3 & 2 & 6 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & -1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & 7 \\ 3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

2. Berilah contoh dari matriks-matriks berikut.

a. *A* berordo 3 × 3
b. *B* berordo 2 × 3
c. *C* berordo 4 × 2
d. *D* berordo 2 × 5
e. *E* berordo 3 × 3
f. *F* berordo 4 × 4

3. Matriks *B* dan *D* pada contoh masing-masing disebut matriks baris dan kolom. Apakah perbedaannya?

Untuk soal nomor 4 sampai dengan 5, perhatikan peristiwa berikut.

Seorang Sosiolog melakukan survei tentang hubungan sosial antara lima orang siswa. Kepada mereka diajukan pertanyaan: *“Dengan siapa akan nonton film dan kepada siapa akan meminjamkan uangnya?”* Hasilnya dinyatakan pada matriks *P* dan *Q* berikut ini (1 artinya ya, 0 artinya tidak).

dengan

$$P = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

dengan

$$Q = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

4. a. Berapakah ordo masing-masing matriks?
   b. Apakah jenis kedua matriks?
5. a. Apakah A suka ke bioskop dengan B? Apakah B suka pergi ke bioskop dengan A?
   b. Dengan siapa D senang pergi menonton?
   c. Apa maksud dari O pada baris ke-4 dan kolom ke-3 pada matriks *Q*?
   d. Mengapa unsur pada diagonal utama matriks di atas nol?

2. Macam-macam Matriks

Berikut ini akan dijelaskan beberapa macam matriks. Setiap jenis matriks memiliki ciri-ciri tertentu.

a. Suatu matriks $A_{m\times n}$ disebut **matriks persegi** bila $m = n$.

$$A_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Dalam hal ini $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$ disebut **unsur-unsur diagonal**. Ordo dari $A_{n\times n}$ adalah n.

Contoh matriks persegi berordo 3: $A_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

b. **Matriks skalar** didefinisikan sebagai matriks persegi yang berordo 1. Contoh matriks skalar R adalah $R = [2]$.

Suatu matriks disebut **matriks diagonal** bila unsur-unsur selain unsur diagonalnya adalah nol.

Contoh matriks diagonal D berordo 4: $D_{4\times 4} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c. Suatu matriks disebut **matriks satuan** atau **matriks identitas** bila unsur-unsur diagonalnya bernilai 1 dan unsur yang lain bernilai 0.

Contoh matriks satuan I berordo 5: $I_{5\times 5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

d. **Matriks segitiga atas** adalah matriks persegi yang unsur-unsur di bawah diagonalnya adalah nol. Sedangkan **matriks segitiga bawah** adalah matriks persegi yang unsur-unsur di atas diagonalnya nol.

Contoh matriks segitiga atas A berordo 3: $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Matriks segitiga bawah B berordo 4: $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

Latihan 2.3

Tentukan x, y, dan z agar matriks-matriks berikut sama dengan transposnya.

a. $A = \begin{bmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & y & 1 \end{bmatrix}$

c. $C = \begin{bmatrix} 0 & x & 2 & 0 & 2x \\ -1 & 3 & -4 & -4 & 2 \\ 2 & -4 & 5 & 2z & 0 \\ 0 & -4 & 3y & -2 & -7 \\ y & 2 & 0 & -7 & 0 \end{bmatrix}$

b. $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 4z \\ 1 & 0 & z & 1 \\ x & 1 & 2 & 6 \\ -2y & 1 & -3x & 1 \end{bmatrix}$

3. Kesamaan Matriks

Dua buah matriks A dan B dikatakan sama, apabila:

a. Ordonya sama

b. Elemen-elemen yang seletak pada kedua matriks tersebut juga sama.

Perhatikan dua matriks berikut.

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

Karena A dan B adalah matriks berordo 2 × 3 dan setiap unsur seletak sama, maka $A = B$.

Perhatikan juga matriks P dan Q di bawah ini.

$P = \begin{pmatrix} x - y & 5 \\ 2 & x + y \end{pmatrix}$ dan $Q = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. Jika $P = Q$ tentukan nilai x dan y.

Dengan menggunakan sifat kesamaan matriks diperoleh $P = Q$.

$\begin{pmatrix} x - y & 5 \\ 2 & x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. Dari kesamaan tersebut diperoleh $x - y = 3$ dan $x + y = 5$. Dengan menggunakan eliminasi y diperoleh:

$$\begin{array}{r} x - y = 3 \\ x + y = 5 \\ \hline 2x = 8 \\ x = 4 \end{array} +$$

Nilai $x = 4$ jika disubstitusikan ke persamaan $x - y = 3$ diperoleh:

$$\begin{aligned} & x - y = 3 \\ \Leftrightarrow & 4 - y = 3 \\ \Leftrightarrow & \quad y = 4 - 3 \\ \Leftrightarrow & \quad y = 1 \end{aligned}$$

Jadi diperoleh nilai $x = 4$ dan $y = 1$

Dua buah matriks $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ dikatakan sama jika $a_{11} = b_{11}$, $a_{12} = b_{12}$, $a_{21} = b_{21}$, dan $a_{22} = b_{22}$.

Kegiatan Menulis 2.2

Coba kalian diskusikan bahwa:

Jika diberikan $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} \frac{3}{3} & \frac{2}{4} \\ \frac{-4}{-2} & 4 \end{bmatrix}$, maka berlaku $A = B$.

Latihan 2.4

1. Manakah dari matriks berikut yang sama?

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $E = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ …

$B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $F = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $J = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $G = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $K = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $H = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $L = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

2. Tentukan nilai *a* dan *b* dalam kesamaan matriks berikut ini.

a. $\begin{pmatrix} 3a & 1 \\ 1 & 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$

e. $\begin{pmatrix} 3b \\ 2a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 35 - 9a \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} a & 2 & 3 \\ 5 & 4 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 2a \end{pmatrix}$

f. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}b \\ -4a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} -4 & 3a \\ -5 & 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 12 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} 4a - 5 & 6a + 7b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b & 20 - 15 \end{pmatrix}$

3. Tentukan nilai *a*, *b*, *c,* dan *d* dari matriks berikut.

a. $\begin{pmatrix} a & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ b & 6c & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 2a \\ c & 4b & 11 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} a & 2b & c \\ -3 & d & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3a & -b \\ -3 & -2c & -3 \end{pmatrix}$

4. Tentukan α jika diketahui $A = B$.

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \text{ dan } B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

4. Matriks Transpose

Suatu matriks berordo *m* × *n* dapat disusun menjadi sebuah matriks berordo *n* × *m* dengan membalik baris dan kolomnya. Matriks ini disebut **matriks transpos.**

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ matriks transposnya adalah}$$

$$A^t = A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Dari suatu matriks A dapat dibentuk matriks baru dengan menuliskan baris 1 sebagai kolom 1, baris 2 sebagai kolom 2, dan seterusnya. Matriks baru ini disebut matriks transpose dari *A*, dilambangkan A' atau A^t (baca transpose matriks *A*).

Apabila $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ maka $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

Kegiatan Menulis 2.3

Dengan kata-katamu sendiri, jelaskan kelebihan dan kekurangan penyajian informasi menggunakan model matriks.

Latihan 2.5

1. a. Perhatikan matriks pada Latihan 2.1 nomor 5. Tentukan matriks trans-posenya.
   b. Apakah informasi yang disajikan matriks transpos ini sama dengan informasi semula?
2. Diketahui dua matriks, yaitu

   $$P = \begin{pmatrix} 6 & 4x \\ 8y & 10 \end{pmatrix} \text{ dan } Q = \begin{pmatrix} 6 & 16 \\ 12 & 10 \end{pmatrix}$$

   a. Tentukan transpose dari matriks Q.
   b. Tentukan transpose dari matriks *P*.
   c. Jika $P = Q^t$, maka tentukan nilai *x* dan *y*.
3. Diketahui dua matriks

   $$A = \begin{pmatrix} 2a & a - b \\ c - d & d + c \\ c - \frac{1}{2}d & e + 2f \end{pmatrix} \text{ dan } Q = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

   a. Tentukan transpose dari matriks *P*.
   b. Jika $P^t = Q$, carilah nilai *a, b, c, d, e,* dan *f*.

B. Operasi Aljabar Matriks

1. Penjumlahan Matriks

Bono dan Yani adalah dua orang sahabat dekat, akan tetapi bersaing ketat dalam pelajaran matematika. Perhatikan nilai rata-rata kedua siswa ini.

	Ulangan 1		Ulangan 2		Total	
	Bono	Yani	Bono	Yani	Bono	Yani
Matematika	82	78	75	80	157	158
Bahasa Inggris	68	72	70	78	138	150

Dalam bentuk matriks data di atas menjadi:

$$\begin{pmatrix} 82 & 78 \\ 68 & 72 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 75 & 80 \\ 70 & 78 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 157 & 158 \\ 138 & 150 \end{pmatrix}$$

Metode mengombinasikan matriks ini disebut **penjumlahan matriks**.

Apabila A dan B adalah dua matriks berordo sama, penjumlahan A dan B, $A + B$ diperoleh dengan cara menjumlahkan elemen-elemen yang seletak.

Contoh 2.4

1. $$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3 & 3+(-5) \\ 5+(-6) & 6+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$$

2. $$\begin{pmatrix} 2 & 3x + y \\ x - y & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -y \\ -x & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 4 & 3x + y - y \\ x - y - x & 5 + 2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -2 & 3x \\ -y & 7 \end{pmatrix}$$

Kegiatan Menulis 2.4

Coba kalian buktikan apakah dalam penjumlahan matriks berlaku sifat komutatif dan asosiatif?

1. Diketahui matriks:

Latihan 2.6

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 2 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{dan } C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Tentukan:

a. $A + B$

b. $A + C$

c. $B + C$

d. $A + B + C$

2. Jika $\begin{pmatrix} 7 & 4a + b \\ 2a & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & a \\ b & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -8 & -1 \end{pmatrix}$, maka tentukan nilai a dan b.

3. Diketahui matriks:

$$A = \begin{pmatrix} 3x & 1 & -6 \\ 2 & x - y & 8 \\ -6 & 4 & 2z \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2x - 1 & 4 & -3 \\ 3 & 5y - 11 & -5 \\ 4 & -7 & 3y - 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 5 & -9 \\ 5 & 9 & 3 \\ -2 & -3 & -5 \end{pmatrix}$$

Tentukan nilai x, y, z bila $A + B = C$.

4. Diketahui $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$, dan $C = \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Tunjukkan bahwa:

a. $A + B = B + A$

b. $(A + B) + C = A + (B + C)$

5. Diberikan penjumlahan matriks sebagai berikut.

$$\begin{pmatrix} 4x + 2y \\ 2y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 + 4y \\ 6x - 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x \\ 6y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10y - 4 \\ 8x \end{pmatrix}$$

Tentukan nilai x dan y.

6. Matriks yang semua unsurnya adalah 0, disebut matriks

nol atau 0.

a. Diberikan matriks

$$R = \begin{pmatrix} 4x & -2 \\ -5 & 3y \end{pmatrix} \text{ dan } S = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

Tentukan nilai x dan y agar $R + S = 0$.

b. Diketahui

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ .$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},\ \text{dan } O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hitunglah:

1) a. $A + D$ d. $O + A$
   b. $B + O$ e. $O + B$
   c. $C + O$ f. $O + C$

2) a. $A + B + O$
   b. $B + C + O$
   c. $O + A + B + C$

2. Pengurangan Matriks

Kita telah mengetahui bahwa apabila a dan b merupakan bilangan nyata, maka $a - b = a + (-b)$. Dengan cara yang sama, karena setiap matriks memiliki negatif, kita dapat menulis $A + (-B)$ sebagai $A - B$. Dengan demikian, suatu matriks dapat dikurangkan dari matriks lain.

$$A - B = A + (-B)$$

Untuk mengurangkan matriks B dari A, jumlahkan negatif B kepada A.

Contoh 2.5

Hitunglah operasi pengurangan matriks berikut ini.

a. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} -2 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 8 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 2 & 8 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

Penyelesaian:

a. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{pmatrix}$

b. $$\begin{pmatrix} -2 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-(-7) & 5-(-2) & 0-1 \\ 3-0 & 4-3 & 5-8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 7 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

c. $\begin{pmatrix} 2 & 8 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-5 & 8-3 & -5+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 5 & -4 \end{pmatrix}$

Contoh 2.6

Jika $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$, tentukan matriks $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$.

Penyelesaian:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x+3 & y-2 \\ z+4 & w-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rl|rl} x+3 &= 7 & y-2 &= -5 \\ x &= 4 & y &= -3 \\ z+4 &= -6 & w-0 &= 1 \\ z &= -10 & w &= 1 \end{array}$$

Jadi, matriks $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -10 & 1 \end{pmatrix}$.

Infomedia

Syarat agar dua matriks dapat dijumlah dan dikurangkan adalah ordonya harus sama.

Latihan 2.7

1. Hitunglah operasi pengurangan matriks berikut ini.

   a. $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

   b. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

   c. $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. Tentukan *a*, *b*, *c*, dan *d* jika:

   $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Jika diketahui matriks:

   $$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ -5 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -3 \\ -8 & 10 & 1 \\ 5 & 9 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -3 \\ 7 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

   a. Tentukan:
      1) $A - B - C$
      2) $A - (B + C)$
      3) $(A + B) - C$
      4) $A - B$
      5) $B - C$
      6) $(A - B) - C$

   b. Apakah pernyataan berikut benar?
      1) $A - B = B - A$
      2) $B - C = C - B$
      3) $A - (B - C) = (A - B) - C$

4. Tentukan matriks *A* yang memenuhi persamaan:

   $$\begin{pmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 12 & -4 & 10 \end{pmatrix} - A = \begin{pmatrix} -4 & 12 & 8 \\ 0 & 8 & -16 \end{pmatrix}$$

5. Tentukan nilai *x*, *y*, *z*, dan *w* dari persamaan:

   $$\begin{pmatrix} 2x - y & 2w \\ 2y + 5 & 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y + 2 & 10 \\ 2y + 3 & 42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Carilah nilai-nilai *p*, *q*, *r*, dan *s* pada tiap persamaan berikut ini.

a. $$\begin{pmatrix} 2p & r-1 \\ 3h & -s+2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

b. $$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3p & \frac{1}{2}r \\ q-3 & 1-2s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

3. Perkalian Bilangan Real dengan Matriks

Untuk x bilangan real, telah kita ketahui bahwa $x + x = 2x$, $x + x + x = 3x$, dan seterusnya. Sekarang akan kita selidiki dalam operasi matriks. Misal diberikan matriks $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

$$A + A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a & c+c \\ b+b & d+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2c \\ 2b & 2d \end{pmatrix}$$

Dengan pengertian $2A = A + A$, maka diperoleh:

$$2A = A + A = 2\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2c \\ 2b & 2d \end{pmatrix}$$

dan

$$\begin{aligned} 3A = A + A + A &= \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+a+a & c+c+c \\ b+b+b & d+d+d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3a & 3c \\ 3b & 3d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dengan demikian kita mendapatkan definisi perkalian bilangan nyata dengan matriks.

Apabila k adalah bilangan nyata dan A adalah matriks, maka kA adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan masing-masing unsur A dengan k.

Contoh 2.7

Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Tentukan:

a. $2A$ b. $3A$

Penyelesaian:

a. $$2A = 2\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times 3 & 2\times(-1) \\ 2\times 4 & 2\times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$$

atau

$$\begin{aligned} 2A &= A + A \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 8 & 10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b. $$3A = 3\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times 3 & 3\times(-1) \\ 3\times 4 & 3\times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ 12 & 15 \end{pmatrix}$$

atau

$$\begin{aligned} 3A = A + A + A &= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3+3+3 & -1+(-1)+(-1) \\ 4+4+4 & 5+5+5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ 12 & 15 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Contoh 2.8

Jika $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, tentukan hasil kali dari:

a. $-2A$

b. $-2A^t$

Penyelesaian:

a. $$-2A = -2\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\times(-3) & -2\times 2 \\ -2\times 1 & -2\times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

b. $$-2A^t = -2\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\times(-3) & -2\times 1 \\ -2\times 2 & -2\times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Contoh 2.9

Tentukan *a, b, c,* dan *d* dari persamaan berikut.

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 12 & 16 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Penyelesaian:

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 12 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rcl||rcl} 2a & = & 4 & 2c & = & 12 \\ a & = & 2 & c & = & 6 \\ 2b & = & 8 & 2d & = & 16 \\ b & = & 4 & d & = & 8 \end{array}$$

Latihan 2.8

1. Suatu pabrik ban memproduksi dua jenis ban dengan tiga ukuran. Pada bulan Oktober seorang pengecer membeli enam belas ban jenis 1 ukuran 15 inci, dua puluh empat ban jenis 1 ukuran 16 inci, delapan jenis 1 ukuran 17 inci, delapan ban jenis 2 ukuran 15 inci, dua belas ban jenis 2 ukuran 16 inci, dan empat ban jenis 2 ukuran 17 inci. Pada bulan November, pengecer tersebut memesan dua belas ban jenis 1 ukuran 15 inci, tiga puluh dua jenis 1 ukuran 16 inci, enam belas ban jenis 1 ukuran 17 inci, dua belas ban jenis 2 ukuran 15 inci, dan dua puluh ban jenis 2 ukuran 16 inci.
   a. Buatlah matriks pemesanan ban pada bulan Oktober dan November. Berilah label baris dan kolomnya.
   b. Berapakah jumlah masing-masing jenis dan ukuran yang dipesan selama dua bulan ini? Buatlah matriksnya dan berilah label baris dan kolomnya.
   c. Misal selama kuartal ke-4 (Oktober – November – Desember) pengecer tersebut setuju untuk memesankan ban seperti pada matriks di bawah ini.

$$\begin{array}{r|ccc} & 15 & 16 & 17 \\ \hline \text{Jenis } 1 & 40 & 52 & 36 \\ \text{Jenis } 2 & 28 & 32 & 16 \end{array}$$

Buatlah matriks yang menunjukkan berapa masing-masing jenis ukuran ban yang harus dipesan pada bulan Desember untuk memenuhi persetujuan tersebut?

d. Pada bulan Oktober tahun berikutnya, pengecer tersebut memesan dua kali dari jumlah masing-masing jenis/ukuran yang dipesan Oktober sebelumnya. Pesanan bulan November tiga kali pesanan November sebelumnya. Buatlah matriks yang menunjukkan jumlah pesanan kedua bulan tersebut.

2. Diketahui matriks $B = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, tentukan:

a. $5B$
c. $5B^t$
e. $\frac{1}{2}B$
b. $-5B$
d. $-B^t$
f. $2\,(B + B^t)$

3. Diketahui $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$, tentukan:

a. $2B$
c. $2A^t + 3B^t$
b. $5A^t$
d. $2B^t + 5A$

4. Tentukan *a, b, c,* dan *d* dari persamaan berikut.

a. $\begin{pmatrix} 12 & 4 & -10 \\ 9 & 1 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 6 & 2 \\ 0 & 8 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a & -2 & c \\ b & -6 & d \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 2a & 3b \\ 2c & 3d \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 20 & 36 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

5. Diketahui matriks $A = (1\ 2\ 3)$, $B = (3\ 2\ 1)$, dan $C = (2\ 1\ 0)$. Tentukan:

a. $2A - B + 3C$
c. $(2A - 2B) + (3A + 2B)$
b. $(\frac{1}{2}A - B) + 3\,(B + C)$
d. $4C - 2\,(A + B)$

6. Jika diberikan persamaan $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix} - 4K = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$,

tentukan matriks *K*.

7. Jika $\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - 5B = 3B - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, tentukan matriks *B*.

8. Jika $2a\begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix} + 3b\begin{pmatrix} 12 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 24 \end{pmatrix}$, tentukan nilai *a* dan *b*.

4. Perkalian Matriks

Perhatikan tabel berikut ini. Tabel 1 menunjukkan pembelian buah-buahan oleh seorang ibu dalam dua minggu berturut-turut. Tabel 2 menunjukkan harga masing-masing jenis buah per kilogram dalam ribuan.

Tabel 1

Membeli (kg)	Jeruk	Pisang
Minggu ke-1	3	1
Minggu ke-2	2	2

Tabel 2

Buah	Harga (ribuan) per kg
Jeruk	8
Pisang	5

Dengan mengalikan harga per kilogram dengan berapa kilogram yang dibeli, kita peroleh:

Total harga buah untuk minggu pertama = (3 × 8) + (1 × 5) = 24 + 5 = 29 ribu. Dalam bentuk matriks, perhitungannya adalah sebagai berikut.

(i) Total harga minggu pertama (dalam ribuan)

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times 8 + 1\times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \end{pmatrix}$$

Yang berarti harganya 29 ribu.

(ii) Total harga minggu kedua diberikan oleh:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times 8 + 2\times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \end{pmatrix}$$

Yang berarti pengeluaran untuk beli buah adalah 26 ribu.

(iii) Biaya beli buah selama dua minggu adalah:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times 8 + 1\times 5 \\ 2\times 8 + 2\times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24+5 \\ 16+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ 26 \end{pmatrix}$$

Metode menggabungkan dua matriks ini disebut **perkalian matriks**. Aturannya adalah *"kalikan baris dengan kolom dan jumlahkan hasilnya"*.

Misal diberikan matriks $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}_{2\times 2}$ dan $B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{2\times 1}$

Hasil kali AB didefinisikan oleh persamaan:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}_{2\times 2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{2\times 1} = \begin{pmatrix} ax & + & by \\ cx & + & dy \end{pmatrix}_{2\times 1}$$

Perhatikan juga perkalian matriks berikut ini!

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}_{1\times 3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{3\times 1} = \begin{pmatrix} ax+by+cz \end{pmatrix}_{1\times 1} \text{ dan}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}_{2\times 3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{3\times 1} = \begin{pmatrix} ax+by+cz \\ dx+ey+fz \end{pmatrix}_{2\times 1}$$

Nampak hasil kali ada hanya jika banyak kolom matriks di kiri sama dengan banyak baris matriks yang di kanan.

$$\begin{array}{ccc} m\times n & n\times k & m\times k \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots a_{2,n} \\ \vdots & & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots a_{m,n} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots b_{1,k} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots b_{2,k} \\ \vdots & & \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \dots b_{n,k} \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \dots c_{1,k} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \dots c_{2,k} \\ \vdots & & \\ c_{m,1} & c_{m,2} & \dots c_{m,k} \end{pmatrix} \end{array}$$

Gambar 2.1 *Ilustrasi perkalian matriks*

Perkalian matriks A dan B dituliskan AB terdefinisi hanya jika banyaknya baris matriks B sama dengan banyaknya kolom matriks A.

Contoh 2.10

Jika $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, maka tentukan:

a. AB

b. BA

Penyelesaian:

a. $$AB = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 5 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\times1 + 2\times2 & 1\times3+2\times4\\ 5\times1 + (-4\times2) & 5\times3 + (-4\times4)\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1 + 4 & 3 + 8\\ 5 - 8 & 15 - 16\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 & 11\\ -3 & -1\end{pmatrix}$$

b. $$BA = \begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 5 & -4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\times1 + 3\times5 & 1\times2 + 3\times(-4)\\ 2\times1 + 4\times5 & 2\times2 + 4\times(-4)\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1 + 15 & 2 - 12\\ 2 + 20 & 4 - 16\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}16 & -10\\ 22 & -12\end{pmatrix}$$

Contoh 2.11

Jika $A = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix}-4 & -3\\ -2 & -1\end{pmatrix}$, maka tentukan:

a. $2\,(AB)$ b. $(2A)B$

Penyelesaian:

a. $$2(AB) = 2\left(\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4 & -3\\ -2 & -1\end{pmatrix}\right) = 2\begin{pmatrix}-4-4 & -3-2\\ -12-8 & -9-4\end{pmatrix}$$

$$= 2\begin{pmatrix}-8 & -5\\ -20 & -13\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-16 & -10\\ -40 & -26\end{pmatrix}$$

b. $$(2A)B = \left(2\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}-4 & -3\\ -2 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 4\\ 6 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4 & -3\\ -2 & -1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-8-8 & -6-4\\ -24-16 & -18-8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-16 & -10\\ -40 & -26\end{pmatrix}$$

Contoh 2.12

Diketahui $I = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ dan $A = \begin{pmatrix}5 & 8\\ 6 & 2\end{pmatrix}$

a. Hitunglah $IA = AI$.
b. Apakah $AI = IA = A$?

Penyelesaian:

a. $IA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+0 & 8+0 \\ 0+6 & 0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$

$AI = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+0 & 0+8 \\ 6+0 & 0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$

b. Dari jawaban a, terbukti bahwa AI = IA = A

$\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$

Contoh 2.13

Jika $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, tentukan:

a. A^2

b. A^3

Penyelesaian:

a.
$$\begin{aligned} A^2 &= A \times A \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4+1 & 2+2 \\ 2+2 & 1+4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned} A^3 &= A \times A \times A \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 10+4 & 8+5 \\ 5+8 & 4+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 13 \\ 13 & 14 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Contoh 2.14

Jika $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, tentukan $A^3 - 2A + A$.

Penyelesaian:

$$A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 13 \\ 13 & 14 \end{pmatrix}$$

$$2A = 2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Jadi, $A^3 - 2A + A$ adalah:

$$\begin{pmatrix} 14 & 13 \\ 13 & 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 12 \\ 12 & 12 \end{pmatrix}$$

Contoh 2.15

Diketahui $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$, tentukan nilai A^2-I.

Penyelesaian:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 25 & 49 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A^2 - I &= \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 25 & 49 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 25 & 48 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Adakah proses yang salah pada penyelesaian di atas? Proses penghitungan A^2 di atas salah, yang benar adalah sebagai berikut .

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}^2 &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4+15 & 6+21 \\ 10+35 & 15+49 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 19 & 27 \\ 45 & 64 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Sehingga A^2-I $= \begin{pmatrix} 19 & 27 \\ 45 & 64 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 27 \\ 45 & 63 \end{pmatrix}$

Kegiatan Menulis 2.5

Apakah berlaku sifat komutatif dalam perkalian matriks? Jelaskan.

Latihan 2.9

1. Hitunglah perkalian matriks di bawah ini.

   a. $\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

   b. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & -2 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

   c. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 \\ 40 \\ 35 \\ 45 \end{pmatrix}$

   d. $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$

   e. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 & 1 & -4 \\ 3 & 2 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. Jika $\begin{pmatrix} 2a & -3b \\ -5b & 4b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 13 \end{pmatrix}$, tentukan nilai a dan b.

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ dan $D = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$
   a. Hitunglah:
      1) AB
      2) AC
      3) AD
      4) BC
      5) $(2A)B$
      6) $A(2B)$
      7) $A(BC)$
      8) $(AB)(AC)$
      9) $A^2 - 2B + C$
      10) $2A^3 - 3C + B$
      11) $2A^2 + B$
      12) $B^2 + C^2 - 2AB$
   b. Selidiki apakah:
      1) $AB = BA$
      2) $BC = CB$
      3) $(AB)C = A(BC)$
      4) $(3A)B = 3AB$
      5) $A(B + C) = AB + AC$
      6) $(B + C)\,A = BA + AC$
      7) $AD + AD = A(D + D) = A(2D)$

4. Misalkan $\begin{pmatrix} 3x & 2x \\ 2y & 3y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x & 3y \\ 3x & 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 & z \\ x & 108 \end{pmatrix}$

   Hitunglah nilai x, y, dan z, jika:
   a. x, y, dan z bilangan asli
   b. x, y, dan z bilangan riil

5. Diketahui $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ dan $Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, tentukan hasil kali dari:
   a. PQ
   b. QP
   c. $P^t \times Q$
   d. $P \times Q^t$
   e. $P^t \times Q^t$

6. Jika $P = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 1 \\ 5 & 7 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ dan $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
   a. Hitunglah PI dan IP.
   b. Apakah $PI = IP = P$?

C. Determinan dan Invers Matriks

1. Determinan Matriks

a. Determinan Matriks ordo 2 × 2

Jika diberikan matriks $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, maka determinan matriks A dituliskan $|A|$ dan dirumuskan dengan:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Contoh 2.16

Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$. Hitunglah determinan matriks A.

Penyelesaian:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} = 7 \times 6 - 9 \times 8 = 42 - 72 = -30$$

Contoh 2.17

Diketahui matriks $B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4x & 12x \end{pmatrix}$. Hitunglah determinan matriks B.

Penyelesaian:

$$\det B = |B| = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 4x & 12x \end{vmatrix} = 5 \times 12x - 4 \times 4x = 60x - 16x = 44x$$

Latihan 2.10

1. Tentukan determinan dari matriks berikut.

   a. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

   b. $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

   c. $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

   d. $D = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ 12 & 8 \end{pmatrix}$

   e. $E = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 9 & -12 \end{pmatrix}$

2. Diketahui matriks $P = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$. Tentukan determinan dari matriks P.

3. Hitunglah determinan matriks $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Bila matriks $R = \begin{pmatrix} -12a & 9 \\ 2a & 1 \end{pmatrix}$, hitunglah determinan matriks R.

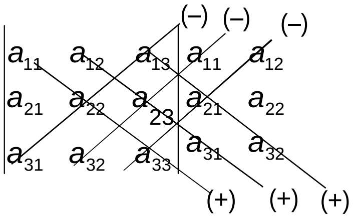
b. Determinan Matriks Ordo 3 × 3

Kita telah mempelajari bagaimana menentukan determinan matriks persegi ordo 2 dan sekarang akan dibahas determinan matriks persegi ordo 3.

Misalkan matriks $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$.

Untuk menentukan determinan matriks ordo 3 × 3, dapat dilakukan dengan meletakkan lagi elemen-elemen kolom pertama dan kedua di belakang kolom ketiga kemudian dioperasikan sebagai berikut.

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$



$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Contoh 2.18

Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Hitunglah determinan matriks A.

Penyelesaian:

$$\det A = \begin{array}{|ccc|cc} & & & (-) & (-)\ (-) \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ & & & (+) & (+)\ (+) \end{array}$$

$$= \quad 2 \times 5 \times 2 + 1 \times 1 \times 1 + 2 \times 3 \times 4 - 2 \times 5 \times 1 - 2 \times 1 \times 4 - 1 \times 3 \times 2$$

$$= \quad 1 + 4 + 18 - 6 - 2 - 6 = 9$$

Untuk menentukan determinan matriks ordo 3 × 3 dapat juga dengan menggunakan determinan matriks ordo 2 × 2 sebagai berikut.

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \quad a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33}$$

$$= \quad a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} + a_{12} a_{23} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31}$$

$$= \quad a_{11} (a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}) - a_{12} (a_{21} a_{33} - a_{23} a_{31}) + a_{13} (a_{21} a_{32} - a_{22} a_{31})$$

$$= \quad a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= \quad (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Cara tersebut menggunakan *elemen baris pertama*.

Selain penjabaran di atas, dengan cara yang sama dapat dijabarkan sebagai berikut.

$$A = (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Cara tersebut menggunakan *elemen kolom kedua*.

Dengan cara yang sama, masih dapat dijabarkan untuk elemen pada baris atau kolom yang lain. Apakah hasilnya sama?

Contoh 2.19

Diketahui $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -2 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Tentukan determinan dari matriks B dengan menggunakan elemen kolom kesatu.

Jawab:

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -2 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+1}(1) \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} (-2) \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+1} (5) \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-2 - 0) + 2(-6 - 0) + (5)(-3 + 4)$$

$$= -2 - 12 + 5 = -9$$

Latihan 2.11

1. Tentukan determinan dari matriks berikut.

   a. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

   b. $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

   c. $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

   d. $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. Dari pekerjaan nomor 1c dan 1d di atas, apakah kesimpulan kalian?

2. Invers Matriks

a. *Pengertian Invers Matriks*

Misal $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dan $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Apabila keduanya kita kalikan, maka didapat:

$$IA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A$$

dan

$$AI = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A$$

Jadi, $IA = AI = A$.

Karena itu matriks I disebut **matriks identitas** untuk perkalian matriks 2 × 2.

Perhatikan uraian berikut.

Misal $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, maka diperoleh:

$$A \times B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-5 & -15+15 \\ 2-2 & -5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B \times A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-5 & 10-10 \\ -3+3 & -5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Jadi, $AB = BA = I$.

Karena itu B disebut **invers perkalian** dari A dan dilambangkan dengan A^{-1}. Demikian juga, A disebut **invers perkalian** dari B dan dilambangkan dengan B^{-1}. Dengan demikian kita peroleh definisi sebagai berikut.

> Apabila A dan B adalah matriks persegi dengan ordo yang sama, sedemikian hingga berlaku $AB = BA = I$, maka B adalah invers dari A dan A invers dari B.

Contoh 2.20

Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$. Apakah A merupakan invers dari B?

Penyelesaian:

$$AB = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7+8 & 28-28 \\ -2+2 & 8-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7+8 & 4-4 \\ -14+14 & 8-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Jadi, $AB = BA = I$. Sehingga A merupakan invers B dan B merupakan invers A.

Latihan 2.12

1. Tentukan hasil perkalian matriks berikut (simpulkan apa yang kalian peroleh).

   a. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ dan $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

   b. $\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 9 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ dan $\begin{pmatrix} -4 & 9 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

2. Manakah yang merupakan invers satu sama lain?

   a. $C = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ dan $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

   b. $B = \begin{pmatrix} -8 & -10 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ dan $C = \begin{pmatrix} \frac{1}{16} & \frac{5}{16} \\ -\frac{5}{32} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$

3. Diketahui $A = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 4 & -9 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$.

   a. Hitung AB dan BA.
   b. Apakah $AB = BA = I$?
   c. Tentukan A^{-1} dan B^{-1}.
   d. Apakah $A = B^{-1}$ dan $B = A^{-1}$.

b. *Rumus Invers Matriks Berordo 2 × 2*

Jika $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, maka dengan definisi invers matriks A adalah A^{-1} sehingga $A\,A^{-1} = I$, diperoleh:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{|ad - bc|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},\ ad - bc \neq 0.$$

Bukti:

Misal $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = A^{-1}$

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sudut Matematika

Meningkatkan Sikap Kritis Siswa

Syarat matriks tidak punya invers adalah nilai determinannya 0 (nol). Mengapa? Jelaskan dengan kata-kata kalian sendiri.

Dengan definisi perkalian dua matriks,

diperoleh

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ap + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya akan dicari nilai p, q, r, dan s.

Dengan menggunakan eliminasi r diperoleh

$$\begin{array}{l|l|l} ap + br = 1 & \times d & adp + bdr = d \\ cp + dr = 0 & \times b & \underline{bcp + bdr = 0} \ - \\ & & (ad\text{-}bc)p = d \\ & & \qquad p = \dfrac{d}{ad - bc} \end{array}$$

Dengan menggunakan eliminasi p diperoleh:

$$\begin{array}{l|l|rcl} ap + br = 1 & \times c & acp + bcr & = & c \\ cp + dr = 0 & \times a & \underline{acp + adr} & \underline{=} & \underline{0} \ - \\ & & (bc\text{ - }ad)\ r & = & c \\ & & r & = & \dfrac{c}{bc - cd} \\ & & & = & -\ \dfrac{c}{ad - bc} \end{array}$$

Dengan menggunakan eliminasi s diperoleh:

$$\begin{array}{l|l|} aq + bs = 0 & \times d \\ cq + ds = 1 & \times b \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} adq + bds &=& 0 \\ \underline{acq + bds} &\underline{=}& \underline{b} \ - \\ (ad - bc)\,q &=& -b \\ q &=& \dfrac{-b}{ad - bc} \end{array}$$

Dengan menggunakan eliminasi q diperoleh:

$$\begin{array}{l|l|} aq + bs = 0 & \times s \\ cq + ds = 1 & \times a \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} acq + bcs &=& 0 \\ \underline{acq + ads} &\underline{=}& \underline{a} \ - \\ (bc - ad)\,s &=& -a \\ s &=& \dfrac{-a}{bc - ad} \\ s &=& \dfrac{a}{ad - bc} \end{array}$$

Jadi diperoleh $p = \dfrac{d}{ad - bc}, q = \dfrac{-b}{ad - bc}, r = \dfrac{-c}{ad - bc}, s = \dfrac{a}{ad - bc}$

Sehingga $B = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Contoh 2.21

Jika $A = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 12 & 3 \end{pmatrix}$, tentukan invers dari matriks A.

Penyelesaian:

$|A| = ad - bc = 24 - 24 = 0$

A tidak mempunyai invers.

Contoh 2.22

Tentukan invers matriks $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Penyelesaian:

$|B| = ad - bc = 4 - 6 = -2$

$$B^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \dfrac{3}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Contoh 2.23

Tentukan C^{-1} jika $C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Penyelesaian:

$$|C| = ad - bc = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$C^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Kegiatan Menulis 2.6

Mengapa matriks *A* pada Contoh 2.21 tidak mempunyai invers?

c. Rumus Invers Matriks Berordo 3 × 3 (**)

Sebelum dibahas tentang menentukan invers matriks dengan ordo 3 × 3, perlu diingat kembali cara menentukan invers matriks ordo 2 × 2 dengan menggunakan rumus berikut.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ maka } A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Misal:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \text{ maka } A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Selain cara di atas, ada cara lain untuk menentukan invers, yaitu dengan cara meredusir *A* ke *I*.

Salah satu cara mencari invers matriks ordo (3 × 3) adalah sebagai berikut.

Misal $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ maka $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \times$ Adjoin A.

$$\text{Adjoin } A = \text{Adj } A = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

Contoh 2.24

Diketahui $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 8 \\ -3 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

Tentukan:

a. determinan A b. Adj (A) c. invers A

Penyelesaian

a. $\det A = \left|\begin{array}{ccc|cc} 5 & 4 & 8 & 5 & 4 \\ -3 & 3 & 5 & -3 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 2 \end{array}\right.$

$\det A = (60 + 40 - 48) - (48 + 50 - 48)$

$\det A = 2$

b. $\text{Adj } (A) = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$

$$\text{Adj }(A) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 22 & 4 & -49 \\ -12 & -2 & 27 \end{bmatrix}$$

c. $$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \times \text{Adj}$$

$$(A) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 22 & 4 & -49 \\ -12 & -2 & 27 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 11 & 2 & -24\frac{1}{2} \\ -6 & -1 & 13\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Latihan 2.13

1. Lengkapi bukti rumus invers matriks berordo 2.
2. Tentukan invers dari matriks berikut.

   a. $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ c. $C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

   b. $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

3. Jika $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

   tentukan:
   a. A^{-1} e. $A \times B$
   b. B^{-1} f. $(A \times B)^{-1}$
   c. $A^{-1} \times A^{-1}$ g. $B \times A$
   d. $B^{-1} \times A^{-1}$ h. $(BA)^{-1}$

4. Diketahui $P = \begin{pmatrix} x & -1 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$ dan $Q = \begin{pmatrix} 2x & 3 \\ 3 & x \end{pmatrix}$, jika determinan P = determinan Q, tentukan x.

5. a. Coba perkirakan unsur-unsur perkalian matriks berikut.

$$\begin{pmatrix} .... & .... \\ .... & .... \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   b. Apa yang terjadi apabila kalian menggunakan rumus?

6. Gunakan apa yang kalian temukan tentang keterbatasan rumus untuk membuat dua matriks yang unsurnya tidak semuanya nol, tetapi tidak mempunyai invers.

3. Penerapan pada Sistem Persamaan Linear

Kamu telah mempelajari sistem persamaan linear dan penyelesaiannya dengan metode substitusi dan eliminisai. Tahukah kalian bahwa sistem persamaan linear juga dapat diselesaikan dengan operasi matriks?

a. Penyelesaian Sistem Persamaan Linear Dua Variabel

Misal, diketahui sistem persamaan linear sebagai berikut.

$$\begin{matrix} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{matrix} \quad \text{..........................} \quad (1)$$

Ubahlah sistem persamaan (1) ke bentuk persamaan matriks. Apakah hasilmu sama seperti berikut:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

Dalam hal ini, nilai variabel yang kita cari adalah x dan y. Kalikan masing-masing ruas dengan invers dari matriks koefisien $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dari sebelah kiri.

Diperoleh:

$$\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} dp-bq \\ aq-cp \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{dp-bq}{ad-bc} \\ \dfrac{aq-cp}{ad-bc} \end{pmatrix}$$

Jadi, penyelesaian sistem persamaan (1) adalah $(x,y) = \left(\dfrac{dp-bq}{ad-bc}, \dfrac{aq-cp}{ad-bc}\right)$

Contoh 2.25

Seorang manajer promosi suatu film basket membeli kaos atau topi yang rencananya akan dibagikan kepada 3.500 pendukung timnya. Harga sebuah kaos Rp9.000,00 dan sebuah topi Rp5.000,00. Jika manajer tersebut telah menghabiskan dana sebesar Rp 25.500.000,00, berapa banyak kaos dan topi yang telah dibeli?

Penyelesaian:

Misal banyaknya kaos = x dan banyaknya topi = y. Diperoleh persamaan pertama $x + y = 3.500$ (mengapa?)
Persamaan kedua adalah $9x + 5y = 25.500$ (mengapa?).
Sehingga diperoleh sistem persamaan:

$$\begin{matrix} x + y = 3.500 \\ 9x + 5y = 25.500 \end{matrix} \quad \text{.........................} \ (1)$$

Dalam persamaan matriks dituliskan:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7.500 \\ 25.500 \end{pmatrix} \quad \text{.......................} \ (2)$$

Determinan dari matriks $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 9 & 5 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 9 & 5 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 9 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 9 = -4$

Persamaan (2) dikalikan dari kiri dengan invers matriks perseginya, diperoleh:

$$\frac{1}{-4}\begin{pmatrix}5 & -1\\ -9 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 9 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\frac{1}{-4}\begin{pmatrix}5 & -1\\ -9 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3.500\\ 25.500\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\frac{1}{-4}\begin{pmatrix}-8.000\\ -6.000\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2.000\\ -1.500\end{pmatrix}$$

Jadi, manajer tersebut telah membeli 2.000 kaos dan 1.500 topi yang akan dibagikan kepada 3.500 pendukung timnya.

Kegiatan Menulis 2.7

Bagaimana jika persamaan matriks dari sistem persamaan linear dikalikan invers matriks perseginya dari sebelah kanan? Jelaskan apa yang akan terjadi.

Latihan 2.14

1. Dua persamaan di bawah ini melambangkan hubungan antara kuantitas dalam suatu situasi.

   $x + y = 5.000$

   $8x + 12y = 42.000$

   a. Gambar suatu situasi yang dapat dimodelkan oleh sistem persamaan ini.

   b. Buat model matriksnya dan kemudian selesaikan.

2. Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan berikut ini dengan menggunakan invers matriks.

   a. $x - y = 5$
      $x + y = 15$

   b. $x + y = -1$
      $x - y = 3$

   c. $3x - y = 5$
      $2x + y = 15$

   d. $10x + 5y + 3 = 0$
      $5x + 10y + 9 = 0$

3. Selesaikan sistem persamaan berikut dengan invers matriks.

   a. $2x - y = 0$
      $x + 3y = 7$

   b. $2x - y = 9$
      $x + 3y = 1$

   c. $4x - 2y - 5 = 0$
      $2x + 6y + 1 = 0$

b. Menggunakan Determinan Matriks

Perhatikan sistem persamaan berikut.

$x + 2y = -5$

$3x - 2y = 1$

Bila dibawa ke bentuk persamaan matriks disebut menjadi:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Apabila sistem (1) mempunyai jawaban, maka harga x dan y ditentukan oleh hasil bagi dua determinan.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}}$$

Untuk nilai x, kolom pertama matriks pembilang ditentukan oleh **suku konstan** dari sistem persamaan. Kolom kedua ditentukan oleh **koefisien** dari y. Untuk nilai y, kolom pertama matriks pembilang ditentukan oleh koefisien variabel x. Kolom kedua ditentukan oleh suku konstan kedua persamaan. Sehingga:

$$x = \frac{(-5)(-2) - (1)(2)}{(1)(-2) - (3)(2)} = \frac{10 - 2}{-2 - 6} = \frac{8}{-8} = -1$$

$$y = \frac{(1)(1) - (3)(-5)}{(1)(-2) - (3)(2)} = \frac{1 + 15}{-8} = \frac{16}{-8} = -2$$

Jadi, penyelesaian sistem persaman (1) adalah (–1, –2).

Dari uraian tersebut, dapatkah kalian merumuskan penyelesaian sistem persamaan linear determinan matriks? Silakan mencoba dan bandingkan hasilnya dengan rumusan berikut.

Secara umum, untuk sistem persamaan linear dalam bentuk: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ dan $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, maka:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -c_1 & b_1 \\ -c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & -c_1 \\ a_2 & -c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Latihan 2.15

1. Apa artinya apabila:

   a. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} -c_1 & b_1 \\ -c_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0$

   b. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -c_1 & b_1 \\ -c_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & -c_1 \\ a_2 & -c_2 \end{vmatrix} = 0$

2. Gunakan determinan untuk menyelesaikan:

   a. $x + y - 3 = 0$
      $x - y + 2 = 0$

   b. $x - 2y + 1 = 0$
      $x + 2y - 3 = 0$

   c. $2x - y + 4 = 0$
      $3x - y - 2 = 0$

   d. $4x - 3y + 2 = 0$
      $3x + 3y - 5 = 0$

3. Carilah determinan masing-masing sistem berikut, kemudian tulis ***satu jawaban***, ***tidak ada jawaban***, atau ***tak hingga jawaban*** untuk masing-masing sistem berikut.

   a. $2x - 3y + 2 = 0$
      $-4x + 6y - 3 = 0$

   b. $x - y + 3 = 0$
      $-3x + 3y - 5 = 0$

   c. $y = 3x - 2$
      $x = 3y + 3$

   d. $x = -2y + 5$
      $y = -2x - 4$

   e. $x = 3y - 2$
      $6y - 2x = 4$

   f. $y = 2x + 3$
      $8x - 4y + 12 = 0$

Refleksi

Pelajari kembali materi matriks pada bab ini. Carilah penerapannya dari internet atau jurnal-jurnal terkait. Diskusikan dengan teman kalian.

Rangkuman

1. Matriks adalah susunan bilangan dalam bentuk persegi panjang yang disusun dalam baris dan kolom. Bentuk umumnya:

$$\begin{array}{ccl} A = & \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} \end{array}\right) & \begin{array}{l} \rightarrow \text{baris ke-1} \\ \rightarrow \text{baris ke-2} \\ \\ \rightarrow \text{baris ke-}i \end{array} \\ & \begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{kolom ke-1} & \text{kolom ke-2} & \text{kolom ke-}j \end{array} & \end{array}$$

2. Ordo matriks ditentukan oleh banyaknya garis diikuti oleh banyaknya kolom.

   a. $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}$$
   Ordo 4 × 3

   b. $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} \end{pmatrix}$$
   Ordo $i \times j$

3. Matriks $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ dikatakan sama jika $a_{11} = b_{11}$, $a_{12} = b_{12}$, $a_{21} = b_{21}$, dan $a_{22} = b_{22}$.

4. Operasi matriks

   a. Penjumlahan matriks:
   $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$$

   b. Pengurangan matriks:
   $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{pmatrix}$$

   c. Perkalian matriks dengan bilangan real:
   $$n \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} na & nb \\ nc & nd \end{pmatrix}$$

   d. Perkalian matriks:
   Aturan perkalian matriks adalah kalikan garis dengan kolom dan jumlahkan hasilnya.
   $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

5. Determinan matriks ordo 2 × 2 untuk matriks $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dirumuskan $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.
6. Apabila A dan B adalah matriks persegi dengan ordo yang sama, sehingga $AB = BA = I$, maka B adalah invers dari A dan A invers dari B.
7. Rumus invers matriks berordo 2 × 2 untuk matriks $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ adalah

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{|ad - bc|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},\ ad - bc \neq 0$$

Uji Kompetensi

A. Berilah tanda silang (X) pada huruf *a*, *b*, *c*, *d*, atau *e* yang kalian anggap benar.

1. Matriks $X = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$, dan $Z = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$. Hasil operasi matriks $(X + Y) - Z$ adalah . . . .

   a. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 11 & 11 \end{pmatrix}$

   b. $\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$

   c. $\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}$

   d. $\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 8 & 11 \end{pmatrix}$

   e. $\begin{pmatrix} -6 & -6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

2. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 4 & 2b & 9 \\ a & 3 & 11 \\ -2 & 1 & -c \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 9 \\ 5 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

   Jika $A = B$, maka nilai $a + b + c$ adalah . . . .

a. 19	d. 4
b. 16	e. –4
c. 7	

3. Dari sistem persamaan $\begin{cases} a + 10b - c = 4 \\ 3a + 5b + 2c = 8 \\ -5a + b + 9c = 12 \end{cases}$, matriks koefisien variabelnya adalah . . . .

   a. $\begin{pmatrix} -5 & 1 & 9 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 10 & -1 \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} 1 & 10 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ -5 & 1 & 9 \end{pmatrix}$

   b. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 10 \\ 3 & 2 & 5 \\ -5 & 9 & 1 \end{pmatrix}$ e. $\begin{pmatrix} 1 & 10 & 4 \\ 3 & 5 & 8 \\ -5 & 1 & 12 \end{pmatrix}$

   c. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 10 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$

4. Determinan dari matriks $M = \begin{pmatrix} 7 & c \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$ adalah 10, maka c = ...

a. $-\frac{2}{3}$	d. $\frac{2}{3}$
b. –4	e. 4
c. –6	

5. Matriks $P = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} x+1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, dan $R = \begin{pmatrix} -6 & -5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Jika $P - Q = R^{-1}$, maka nilai $x + 7$ adalah . . . .

a. –9	d. 7
b. –7	e. 9
c. 0	

6. Himpunan penyelesaian dari persamaan matriks $\begin{pmatrix}5 & 3\\ 12 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20\\ 10\end{pmatrix}$ adalah . . . .

a. $\left(-\frac{90}{6}, \frac{290}{6}\right)$
b. $\left(\frac{90}{6}, -\frac{290}{6}\right)$
c. $\left(-\frac{150}{6}, \frac{190}{6}\right)$
d. $\left(-\frac{150}{6}, \frac{290}{6}\right)$
e. $\left(\frac{90}{6}, -\frac{190}{6}\right)$

7. Diketahui persamaan matriks $\begin{pmatrix}2 & t\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 8\end{pmatrix}$. Jika determinan dari $\begin{pmatrix}2 & t\\ 1 & 1\end{pmatrix}=4$, $x = 5$ dan $y = 3$, maka t adalah . . . .

a. –6
b. –2
c. 0
d. 2
e. 6

8. Invers matriks $\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{8}{18}\\ \frac{3}{2} & \frac{2}{5}\end{pmatrix}$ adalah . . . .

a. $\frac{20}{8}\begin{pmatrix}\frac{2}{5} & \frac{8}{18}\\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$
b. $\frac{20}{8}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{3}{2}\\ \frac{8}{18} & -\frac{2}{5}\end{pmatrix}$
c. $\frac{8}{20}\begin{pmatrix}\frac{2}{5} & \frac{8}{18}\\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$
d. $\frac{8}{20}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{3}{2}\\ \frac{8}{18} & -\frac{2}{5}\end{pmatrix}$
e. $-\frac{20}{8}\begin{pmatrix}\frac{2}{5} & \frac{8}{18}\\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

9. Diketahui matriks $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 7 & 3 & -8 \end{pmatrix}$

Elemen-elemen kolom kedua dari $(-P)^t$ adalah . . .

a. -2, -3
b. -1, -2, -3
c. -7, -3, 8
c. -5, 8
d. 1, 7

10. Dengan melakukan operasi baris, himpunan penyelesaian dari sistem $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 5 \\ 5 & 10 & 11 & 6 \end{pmatrix}$ adalah . . . .

a. {(3,2–1)}
b. {(3,2,1)}
c. {(–3,–2,1)}
d. {(–3,–2,–1)}
e. {(–3,2,1)}

B. Jawablah pertanyaan-pertanyaan di bawah ini dengan benar.

1. Jika $L = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}$ dan $M = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, tentukan:

a. LM
b. $(LM)^t$
c. $(LM)^{-1}$

2. Diketahui $K = \begin{pmatrix} 6-a & 4+c \\ 3b & d \end{pmatrix}$ dan $L = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Jika $K = L$, tentukan nilai a, b, c dan d.

3. Lakukan operasi baris untuk menentukan penyelesaian dari sistem di bawah ini.

a. $\begin{pmatrix} 9 & 4 & 0 & 15 \\ 3 & -2 & 0 & 5 \\ 10 & 6 & 1 & 25 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} -4 & 3 & 0 & 10 \\ 5 & 4 & 0 & 14 \\ 7 & 1 & 2 & -9 \end{pmatrix}$

4. Burhan dan Andi berbelanja di supermarket pada hari Minggu lalu. Burhan membeli 3 kaos dan 1 celana seharga Rp170.000,00. Sedangkan Andi membeli 1 kaos dan 2 celana seharga Rp190.000,00. Jika harga satu kaos x rupiah dan harga satu celana y rupiah, tentukan:
   a. bentuk matriks dari variabel x dan y,
   b. harga satu buah kaos dan harga satu celana dengan menggunakan metode matriks.
5. Selesaikan persamaan linear $x + 2y = 7$ dan $x + 3y = 11$. Dengan menggunakan matriks tentukan nilai x dan y.

Latihan Semester 1

Berilah tanda silang (X) pada huruf *a*, *b*, *c*, *d*, atau *e* yang kalian anggap benar.

1. Apabila $x, y \in R$ terletak pada himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan . . . .
   $x + 3y \leq 9$
   $2x + y \leq 8$
   $x \geq 0$
   $y \geq 0$

   Maka nilai maksimum fungsi sasaran $x + 2y$ pada himpunan penyelesaian x, y bilangan real ialah . . . .
   a. 6
   b. 7
   c. 8
   d. 9
   e. 4

2. Untuk membuat barang *A* diperlukan 6 jam pada mesin I dan 4 jan pada mesin II, sedangkan barang-barang jenis *B* memerlukan 2 jam pada mesin I dan 8 jam pada mesin II, kedua mesin tersebut setiap harinya bekerja tidak lebih dari 18 jam. Jika setiap hari dibuat x buah barang *A* dan y buah barang *B*, maka model matematika dari uraian di atas adalah . . . .
   a. $6x + 4y \leq 18$, $2x + 8y \leq 18$, $x \geq 0$, $y \geq 0$
   b. $4x + 6y \leq 18$, $8x + 2y \leq 18$, $x \geq 0$, $y \geq 0$
   c. $3x + y \leq 9$, $2x + 4y \leq 9$, $x \geq 0$, $y \geq 0$
   d. $3x + 4y \leq 9$, $2x + y \leq 9$, $x \geq 0$, $y \geq 0$
   e. $4x + 3y \leq 9$, $x + 2y \leq 9$, $x \geq 0$, $y \geq 0$

3. Rokok A yang harganya Rp200,00 per bungkus dijual dengan laba Rp40,00 per bungkus, sedangkan rokok B yang harganya Rp100,00 per bungkus dijual dengan laba Rp30,00 per bungkus. Seorang pedagang rokok yang mempunyai modal Rp80.000,00 dan kiosnya maksimum dapat menampung 500 bungkus rokok, akan memperoleh keuntungan sebesar-besarnya jika ia membeli . . . .
   a. 300 bungkus rokok *A* dan 200 bungkus rokok *B*
   b. 200 bungkus rokok *A* dan 300 bungkus rokok *B*

c. 250 bungkus rokok *A* dan 250 bungkus rokok *B*
d. 100 bungkus rokok *A* dan 400 bungkus rokok *B*
e. 400 bungkus rokok *A* dan 100 bungkus rokok *B*

5. Suatu perusahaan tas dan sepatu memerlukan empat unsur *a* dan enam unsur *b* per minggu untuk masing-masing hasil produksinya. Setiap tas memerlukan satu unsur *a* dan dua unsur *b*. Setiap sepatu memerlukan dua unsur *a* dan dua unsur *b* Bila setiap tas untung 3.000 rupiah, setiap sepatu untung 2.000 rupiah, maka banyak tas atau sepatu yang dihasilkan per minggu agar diperoleh untung yan maksimal ialah . . . .
a. 3 tas
b. 4 tas
c. 2 sepatu
d. 3 sepatu
e. 2 tas dan 1 sepatu

6. Seorang pemilik toko mempunyai jualan telur ayam dan telur bebek. Ia hanya ingat bahwa banyaknya telur bebek 20 butir lebih banyak dari banyaknya telur ayam, sedangkan uang hasil penjualan seluruhnya Rp560,00. Bila harga sebutir telur bebek + sebutir telur ayam Rp12,00 dan selisih harga sebutir telur bebek dengan sebutir telur ayam Rp2,00 maka banyaknya telur ayam . . . .
a. 25
b. 30
c. 32
d. 35
e. 40

7. Suatu jenis roti I membutuhkan 100 g tepung dan 25 g mentega, roti jenis lain II membutuhkan 50 g tepung dan 50 g mentega. Tersedia tepung 1,5 k dan mentega 1 kg. Jika *x* banyaknya roti I dan *y* banyaknya roti II, supaya kita dapat membuat roti sebanyak mungkin dari 2 jenis itu, 2 pertidaksamaan dalam *x* dan *y* yang memenuhi syarat tersebut adalah . . . .
a. $2x + y \leq 20$, $x + 2y \leq 60$
b. $4x + y \leq 60$, $x + y \leq 20$
c. $2x + y \leq 20$, $2x + y \leq 30$
d. $2x + y \leq 30$, $x + 2y \leq 40$
e. $x + 2y \leq 30$, $2x + y \leq 40$

8. Sebidang tanah seluas 75 m^2 akan ditanami 100 pohon jeruk dan apel, setiap satu pohon jeruk memakan tempat 1 m^2 sedangkan pohon apel $\frac{1}{2}$ m^2. Setelah 5 tahun setiap pohon jeruk menghasilkan 20 ribu rupiah dan apel 15 ribu rupiah tiap pohonnya. Banyak pohon tiap jenis harus ditanam agar pada panen nanti didapatkan uang sebanyak-banyaknya adalah . . . .
   a. 75 pohon jeruk dan 25 pohon apel
   b. 60 pohon jeruk dan 40 pohon apel
   c. 70 pohon jeruk dan 30 pohon apel
   d. 25 pohon jeruk dan 75 pohon apel
   e. 50 pohon jeruk dan 50 pohon apel

9. Seorang penjahit membuat 2 jenis pakaian untuk dijual. Pakaian jenis I memerlukan 2 m katun dan 4 m sutera, dan pakaian jenis II memerlukan 5 m katun dan 3 m sutera. Bahan katun yang tersedia adalah 70 m dan sutera yang tersedia adalah 84 m. Pakaian jenis I dijual dengan laba Rp25.000,00 dan pakaian jenis II mendapat laba Rp50.000,00. Agar ia memperoleh laba yang sebesar-besarnya maka banyak pakaian masing-masing adalah . . . .
   a. pakaian jenis I = 15 potong dan jenis II = 8 potong
   b. pakaian jenis I = 8 potong dan jenis II = 15 potong
   c. pakaian jenis I = 20 potong dan jenis II = 3 potong
   d. pakaian jenis I = 13 potong dan jenis II = 10 potong
   e. pakaian jenis I = 10 potong dan jenis II = 13 potong

10. Jika $\begin{pmatrix} a & b \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 13 \\ -7 & 12 \end{pmatrix}$, maka nilai $a + b$ = ...
   a. 5
   b. 4
   c. 3
   d. 2
   e. 1

11. Diketahui persamaan dalam matriks $x\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -21 \\ 2z-1 \end{pmatrix}$ nilai z = ...
   a. –2
   b. 3
   c. 0
   d. 6
   e. 30

12. Jika diketahui $\begin{pmatrix} m & n \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 23 \\ 14 & 13 \end{pmatrix}$ maka nilai m dan n masing-masing adalah . . . .
    a. 4 dan 6
    b. 5 dan 4
    c. 5 dan 3
    d. 4 dan 5
    e. 3 dan 7

13. Diketahui $A = \begin{pmatrix} 5+x & x \\ 5 & 3x \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 9 & -x \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$. Jika determinan *A* dan determinan *B* sama maka harga x yang memenuhi adalah . . . .
    a. 3 atau 4
    b. –3 atau 4
    c. 3 atau –4
    d. –4 atau 5
    e. 3 atau –5

14. Jika $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ maka $(AB)^{-1}$ = ...
    a. $\begin{pmatrix} 11 & 8 \\ -29 & -21 \end{pmatrix}$
    b. $\begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$
    c. $\begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$
    d. $\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$
    e. $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$

15. Matriks $M = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ dan $KM = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ maka matriks K = . . .

a. $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

e. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

16. Matriks $\begin{pmatrix} x & 1 \\ -2 & 1-x \end{pmatrix}$ tidak punya invers untuk nilai x = ...

a. –1 atau –2
b. –1 atau 0
c. –1 atau 1
d. –1 atau 2
e. 1 atau 2

17. Nilai a dari persamaan matriks $\begin{pmatrix} 5 & 30 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & a+3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} =$

$3\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ adalah . . . .

a. 75
b. 11
c. 968
d. –9
e. –11

18. Jika $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ dan $A^{-1}B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, maka matriks B adalah . . .

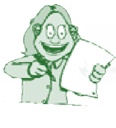
a. $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -0 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$

e. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$



19. Hasil kali akar-akar persamaan $\begin{vmatrix} 3x-1 & 3 \\ x+1 & x+2 \end{vmatrix} = 0$ adalah . . . .

a. $-\frac{2}{3}$

b. $-\frac{4}{3}$

c. $-\frac{5}{3}$

d. $\frac{2}{3}$

e. $\frac{4}{3}$

20. Jika $\begin{pmatrix} x-5 & 4 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & y-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -16 & 5 \end{pmatrix}$, maka . . . .

a. $y = 3x$

b. $y = 2x$

c. $y = x$

d. $y = \frac{x}{3}$

e. $y = \frac{x}{2}$

Bab

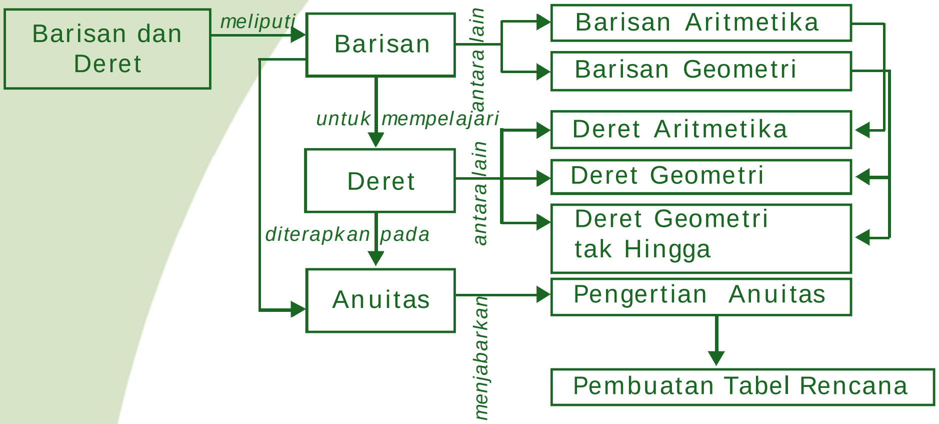
3

Barisan dan Deret

Menurut Undang-Undang Perbankan No.7 tahun 1992, bank adalah badan usaha yang menghimpun dana dari masyarakat dalam bentuk simpanan dan menyalurkannya ke pada masyarakat untuk meningkatkan taraf hidup rakyat. Salah satu tugas bank adalah menetapkan tingkat suku bunga bagi penabung dan peminjam uang di bank. Jenis bunga yang digunakan biasanya bunga majemuk. Adapun cara menentukan besar bunga majemuk bisa ditentukan dengan menggunakan deret yang akan kita pelajari pada bab ini.

Berikut ini kalian akan mempelajari barisan dan deret sehingga kalian dapat menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan deret.

Peta konsep berikut memudahkan kalian dalam mempelajari seluruh materi pada bab ini.



Dalam bab ini terdapat beberapa **kata kunci** yang perlu kalian ketahui.

1. Barisan aritmetika
2. Barisan geometri
3. Deret aritmetika
4. Deret geometri
5. Beda
6. Rasio

Dalam kehidupan sehari-hari kita sering menggunakan konsep barisan dan deret. Nomor rumah misalnya, selalu diurutkan dengan pola-pola tertentu. Di kelas IX kalian telah mempelajari masalah barisan dan deret. Pelajari kembali materi tersebut agar memudahkan kalian mempelajari bab ini.

A. Barisan

1. Barisan Aritmetika

Sebelum membahas lebih lanjut tentang barisan aritmetika, masih ingatkah kalian dengan apa yang dimaksud dengan barisan bilangan? Barisan bilangan adalah himpunan bilangan yang ditulis secara berurut dengan aturan tertentu.

Barisan adalah urutan bilangan yang memiliki aturan tertentu.

Contoh 3.1

Himpunan bilangan {2, 6, 10, 14, . . .}.

Himpunan bilangan pada contoh di atas merupakan barisan bilangan, sebab tersusun secara berurutan dari terkecil ke terbesar dan memenuhi aturan tertentu, yaitu selisih antara suku yang berdekatan sama dengan empat. Untuk kepraktisan menulis suatu barisan bilangan tanda kurung kurawal selambang menyatakan himpunan ditiadakan. Jadi, barisan bilangan {2, 6, 10, 14, ...} cukup ditulis barisan bilangan 2, 6, 10, 14, ...

Barisan bilangan pada contoh tersebut merupakan salah satu contoh barisan aritmetika. Perhatikan contoh-contoh barisan aritmetika yang lain berikut ini.

a. 1, 4, 7, 10, . . .
b. 3, 5, 7, 9, . . .
c. 45, 35, 25, 15, . . .

Pada masing-masing contoh di atas selisih antara suku yang berdekatan adalah sama.

Perhatikan kembali contoh di atas. Setiap urutan bilangan di atas memiliki aturan tertentu. Misalnya urutan bilangan pada a, aturan tertentunya adalah penambahan dengan 3. Urutan bilangan b aturan tertentunya adalah penambahan 2. Sekarang coba kalian tentukan aturan tertentu urutan bilangan pada c.

Urutan bilangan yang memiliki aturan tertentu disebut barisan. Sedangkan barisan-barisan di atas memiliki selisih antara dua suku yang berurutan tetap, disebut barisan aritmetika.

Definisi

Barisan aritmetika adalah barisan bilangan yang selisih antara suku-suku yang berurutan adalah sama.

Dengan kata lain definisi barisan aritmatika dapat dinyatakan sebagai berikut.

Barisan $U_1, U_2, U_3, \ldots, U_n$ merupakan barisan aritmetika jika $U_2 - U_1 = U_3 - U_2 = \ldots = U_n - U_{n-1} = \mathrm{b}$.

Dalam hal ini b adalah bilangan konstan yang sering disebut sebagai beda. Perhatikan kembali contoh di atas.

a. 1, 4, 7, 10, . . .
   $b = 4 - 1 = 7 - 4 = 10 - 7 = \ldots = 3$
   $U_1 = 1$
   $U_2 = 1 + 1 \times 3 = 4$
   $U_3 = 1 + 2 \times 3 = 7$
   $U_4 = 1 + 3 \times 3 = 10$
   $U_n = 1 + (n - 1)3$

b. 3, 5, 7, 9, . . .
   $b = 5 - 3 = 7 - 5 = 9 - 7 = \ldots = 2$
   $U_1 = 3$
   $U_2 = 3 + 1 \times 2 = 5$
   $U_3 = 3 + 2 \times 2 = 7$
   $U_4 = 3 + 3 \times 2 = 9$
   $U_n = 3 + (n - 1)2$

Infomedia

Fibonacci membuat barisan yang terkenal dengan barisan Fibonacci, yaitu besar suatu suku merupakan hasil penjumlahan dari dua suku sebelumnya.

c. 45, 35, 25, 15, . . .
   $b = 35 - 45 = 25 - 35 = 15 - 25 = \ldots = -10$
   $U_1 = 45$
   $U_2 = 45 + 1(-10) = 35$
   $U_3 = 45 + 2(-10) = 25$
   $U_4 = 45 + 3(-10) = 15$
   $U_n = 45 + (n - 1)\,(-10)$

Jadi, secara umum suku ke-n barisan aritmetika dengan suku pertama dengan $U_1 = a$ dan beda b, dapat dinyatakan sebagai berikut.

$U_1 = a$
$U_2 = a + 1\,b$
$U_3 = a + 2\,b$
$U_4 = a + 3\,b$
$U_n = a + (n - 1)\,b$

Selanjutnya untuk merumuskan suku ke-n suatu barisan aritmatika adalah sebagai berikut. Jika suku pertama disebut a, banyaknya suku dilambangkan dengan n, selisih antara dua suku berturutan disebut b, maka diperoleh: rumus suku ke-n barisan aritmetika adalah:

$$U_n = a + (n - 1)b$$

Contoh 3.2

Tentukan suku yang diminta pada barisan berikut ini.

a. 4, 9, 14, 19, . . . suku ke-11
b. 5, 8, 11, 14, . . . suku ke-15
c. 4, -2, -8, -14, . . . suku ke-21

Penyelesaian:

a. 4, 9, 14, 19, . . .

$a = 4$, $b = 5$

$$\begin{aligned} U_n &= a + (n - 1)b \\ U_{11} &= 4 + (11 - 1)\ 5 \\ U_{11} &= 4 + 10 \times 5 = 54 \end{aligned}$$

b. 5, 8, 11, 14, . . .

$a = 5$, $b = 3$

$$\begin{aligned} U_{15} &= 5 + (15 - 1)\ 3 \\ U_{15} &= 5 + 14 \times 3 = 47 \end{aligned}$$

c. 4, –2, –8, –14, . . .

$a = 4$, $b = –6$

$$\begin{aligned} \mathrm{U}_{21} &= 4 + (21 - 1)(-6) \\ \mathrm{U}_{21} &= 4 + 20(-6) = -116 \end{aligned}$$

Sudut Matematika

Mencari Informasi Lebih Jauh

Fibonacci menemukan barisan Fibonacci terinspirasi dari sifat kelinci. Bagaimana sifat kelinci tersebut? Carilah informasi dari internet atau jurnal tentang kelinci Fibonacci, kemudian diskusikan dengan teman kalian.

Contoh 3.3

Suku ketiga dan keenam dari barisan aritmetika masing-masing 38 dan 56. Tentukan suku ke-n dan suku ke-50.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} U_n &= a + (n - 1)b \\ U_3 &= a + 3b = 38 \\ U_6 &= a + 6b = 56 \\ \hline -3b &= -18 \quad - \\ b &= 6 \end{aligned}$$

$b = 6$ disubstitusikan ke persamaan $a + 2b = 38$, diperoleh:
$a + 2(6) = 38 \Leftrightarrow a = 26$.
$U_n = a + (n - 1)b$
$U_n = 26 + (n - 1)6$
$U_n = 26 + 6n - 6$
$U_n = 6n + 20$
$U_{50} = 6 \times 50 + 20 = 320$

Contoh 3.4

Tiga bilangan membentuk barisan aritmetika. Jumlah ketiga bilangan itu adalah 60 dan hasil kalinya 6.000. Tentukan bilangan-bilangan tersebut.

Penyelesaian:

Misalkan barisan aritmetika tersebut: $a - b$, a, $a + b$.
$U_1 + U_2 + U_3 = 60$
$(a - b) + a + (a + b) = 60$
$3a = 60$
$a = 20$
$U_1 \times U_2 \times U_3 = 6.000$
$(a - b)\ a(a + b) = 6.000$
$(a - b)(a + b)a = 6.000$
$(a^2 - b^2)a = 6.000$
$(20^2 - b^2)20 = 6.000$
$400 - b^2 = 300$
$b^2 = 100$
$b = \pm\ 10$

Untuk $a = 20$ dan $b = 10$
$U_1 = a - b = 20 - 10 = 10$, $U_2 = a = 20$, $U_3 = a + b = 20 + 10 = 30$
Untuk $a = 20$ dan $b = -10$
$U_1 = a - b = 20 - (-10) = 30$, $U_2 = a = 20$, $U_3 = a + b = 20 + (-10) = 10$

Contoh 3.5

Jika harga sebuah mobil baru adalah seratus juta rupiah dan harga jualnya akan menyusut 5% dari harga belinya setiap tahun. Tentukan harga jual mobil pada tahun ke-5.

Penyelesaian:

Misalkan x_n melambangkan harga mobil setelah dipakai n tahun.
$x_1 = x - x\ r\%$
$x_2 = x_1 - x\ r\% = x - x\ r\% - x\ r\% = x - 2x\ r\%$
$x_3 = x_2 - x\ r\% = x - 2x\ r\% - x\ r\% = x - 3x\ r\%$
$x_n = x_{n\text{-}1} - x\ r\% = x - (n - 1)x\ r\% - x\ r\% = x - nx\ r\% = x(1 - n\ r\%)$

Dari hasil di atas x_1, x_2, x_3, ..., x_n merupakan barisan aritmetika dengan suku pertama $x - x\, r\%$ dan beda $-x\, r\%$.

Untuk soal di atas, x = 100.000.000 dan r = 5%

x_5 = 100.000.000 (1 – 5.5%)
= 100.000.000 (1 – 0,25)
= 100.000.000 (0,75) = 75.000.000

Jadi, setelah tahun ke-5 harga jual mobil menjadi 75 juta rupiah.

Kegiatan Menulis 3.1

Bagaimana cara menentukan suku tengah suatu barisan aritmetika?

Latihan 3.1

1. Tentukan beda barisan aritmetika berikut.
   a. 6, 3, 0, –3, . . .
   b. 7, 11, 15, 19, . . .
   c. –17, –23, –29, –35, . . .
   d. $1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}$
2. Tentukan tiga suku pertama dari barisan aritmetika, jika beda dan salah satu sukunya diketahui.
   a. $b = 2$; $U_6 = 10$
   b. $b = -5$; $U_4 = 75$
   c. $b = \frac{3}{4}; U_5 = \frac{1}{2}$
   d. $b = -\frac{5}{6}$; $U_3 = 2$
3. Tentukan suku yang diminta pada barisan berikut ini.
   a. 3, 103, 203, . . . suku ke-16
   b. –31, –25, -19, . . .suku ke- 21
   c. –4, ½, 5, . . . suku ke- 11
4. Tentukan suku pertama dan beda barisan aritmetika jika diketahui:
   a. $U_3 = 8$ dan $U_7 = 48$
   b. $U_7 = 5$ dan $U_{13} = -13$
   c. $U_5 = 3$ dan $U_7 - U_2 = 5$
   d. $U_8 = -5$ dan $U_{12} - U_4 = -2$

5. Tiga bilangan membentuk barisan aritmetika. Jumlah ketiga bilangan itu adalah 18 dan hasil kalinya adalah 192. Tentukan bilangan-bilangan tersebut.
6. Suku ketiga dan kesembilan suatu barisan aritmetika berturut-turut –2 dan 34. Tentukan suku ke-17.
7. Tentukan nilai k agar bilangan-bilangan berikut membentuk barisan aritmetika.
   a. $k - 4$, k, dan $2k - 1$
   b. $k - 6$, $k - 1$, $2k - 4$, dan $3k - 7$
8. Jika diketahui suku pertama 9 dan suku terakhirnya 25, tentukan suku tengahnya untuk banyak suku ganjil.
9. Jika harga sebuah sepeda motor adalah Rp10.000.000,00 dan harga jualnya akan menyusut 0,5% dari harga belinya tiap tahun, tentukan harga jual sepeda motor itu pada tahun ke-3.

2. Barisan Geometri

Perhatikan contoh-contoh barisan di bawah ini.

a. 3, 6, 12, 24, . . .
b. $p, p^2, p^3, p^4, \ldots$
c. $ax, ax^2, ax^3, ax^4, \ldots$

Aturan apakah yang berlaku pada barisan bilangan di atas? Apakah bedanya dengan barisan aritmatika? Barisan bilangan yang mempunyai ciri seperti itu disebut barisan geometri. Perbandingan antara dua suku berturutan pada barisan geometri disebut rasio.

Contoh-contoh barisan di atas merupakan barisan geometri karena pada masing-masing barisan perbandingan antara setiap suku dengan suku sebelumnya sama nilainya.

Definisi

Barisan geometri adalah barisan bilangan yang nilai perbandingan tiap dua sukunya yang berurutan sama.

Dengan kata lain, barisan $U_1, U_2, U_3, \ldots, U_n$ disebut barisan geometri jika $\dfrac{U_2}{U_1} = \dfrac{U_3}{U_2} = \ldots = \dfrac{U_n}{U_{n-1}} = r$.

r = suatu konstanta yang disebut rasio (pembanding).

Perhatikan kembali contoh di atas.

a. 3, 6, 12, 24, . . .

$$r = \frac{6}{3} = \frac{12}{6} = \frac{24}{12} = \ldots = 2$$

$U_1 = 3$
$U_2 = 3(2)^1 = 6$
$U_3 = 3(2)^2 = 12$
$= 3(2)^3 = 24$
$U_n = 3(2)^{n-1}$

b. $p, p^2, p^3, p^4, \ldots$

$$r = \frac{p^2}{p} = \frac{p^3}{p^2} = \frac{p^4}{p^3} = \ldots = p$$

$U_1 = p$
$U_2 = p(p)^1 = p^2$
$U_3 = p(p)^2 = p^3$
$U_4 = p(p)^3 = p^4$
$U_n = p(p)^{n-1}$

c. $ax, ax^2, ax^3, ax^4, \ldots$

$$r = \frac{ax^2}{ax} = \frac{ax^3}{ax^2} = \frac{ax^4}{ax^3} = \ldots = x$$

$U_1 = ax$
$U_2 = ax(x)^1 = ax^2$
$U_3 = ax(x)^2 = ax^3$
$U_4 = ax(x)^3 = ax^4$
$U_n = ax(x)^{n-1}$

Jadi rumus umum suku ke-n barisan geometri dengan suku pertama, $U_1 = a$ dan rasio r dapat dinyatakan sebagai berikut.

$U_1 = a$
$U_2 = a(r)^1 = ar$
$U_3 = a(r)^2 = ar^2$
$U_4 = a(r)^3 = ar^3$
$U_n = a(r)^{n-1}$

Suku ke-*n* barisan geometri adalah:

$$\boxed{U_n = ar^{n-1}}$$

dengan U_n = suku ke-n
a = suku pertama
r = rasio
n = banyaknya suku

Contoh 3.6

Diketahui barisan geometri 4, –8, 16, –32, . . .

a. Tentukan rasionya. b. Tentukan U_{10}.

Penyelesaian:

$$r = \frac{-8}{4} = -2$$

$$U_n = ar^{n-1}$$

$$U_{10} = 4(-2)^{10-1}$$

$$= 4(-2)^9 = -2.048$$

Contoh 3.7

Suku kedua dan kelima suatu barisan geometri berturut-turut 6 dan 162. Tentukan suku keempatnya.

Penyelesaian:

$$U_2 = 6,\ U_5 = 162$$

$$ar = 6$$

$$ar^4 = 162$$

$$\frac{ar^4}{ar} = \frac{162}{6}$$

$$r^3 = 37$$

$$U_4 = ar^3 = 2 \times 37 = 74$$

Contoh 3.8

Tiga bilangan aritmetika membentuk barisan geometri jumlah ketiga bilangan itu 35 dan hasil kalinya 1.000. Tentukan bilangan-bilangan tersebut.

Penyelesaian:

Misalkan barisan tersebut: $\frac{a}{r}$, a, ar, . . .

$$U_1 \times U_2 \times U_3 = 1.000$$

$$\frac{a}{r} \times a \times ar = 1.000$$

$$a^3 = 1.000$$

$$a = 10$$

$$U_1 + U_2 + U_3 = 35$$

$$\frac{a}{r} + a + ar = 35$$

Sudut Matematika

Meningkatkan Sikap Kritis Siswa

Adakah jenis-jenis barisan yang lain? Carilah di internet atau jurnal-jurnal terkait kemudian diskusikan dengan teman kalian.

$$\frac{10}{r} + 10 + 10r = 35$$
$$10 + 10r + 10r^2 = 35r$$
$$2r^2 - 5r + 2 = 0$$
$$(2r - 1)(r - 2) = 0$$
$$r = \frac{1}{2} \text{ atau } r = 2$$

Jadi, bilangan tersebut adalah 20, 10, 5 atau 5, 10, 20.

Contoh 3.9

Suatu tanaman ketika ditanam tingginya 25 cm dan setiap bulan tingginya bertambah 2,5%. Tentukan tinggi tanaman setelah satu tahun.

Penyelesaian:

Misalkan t_n melambangkan tinggi tanaman setelah n bulan.
Tinggi setelah 1, 2, 3, . . . , n bulan adalah sebagai berikut.

$t_1 = t_0 + t_0 \times 2{,}5\% = t_0(1 + 2{,}5\%)$

$t_2 = t_1 + t_1 \times 2{,}5\% = t_1(1 + 2{,}5\%) = t_0(1 + 2{,}5\%)(1 + 2{,}5\%) = t_0(1 + 2{,}5\%)^2$

$t_3 = t_2 + t_2 \times 2{,}5\% = t_2(1 + 2{,}5\%) = t_0(1 + 2{,}5\%)(1 + 2{,}5\%)(1 + 2{,}5\%)$
$\quad = t_0(1 + 2{,}5\%)^3$

$t_n = t_{n\text{-}1} + t_{n-1} \times 2{,}5\% = t_{n\text{-}1}(1 + 2{,}5\%) = t_0(1 + 2{,}5\%)^n$.

Dari hasil di atas dapat disimpulkan bahwa t_1, t_2, t_3, . . . , t_{n} merupakan barisan geometri dengan suku pertama $t_0(1 + 2{,}5\%)$ dan rasio $(1 + 2{,}5\%)$.

Pada soal di atas t_0 = 25 cm, maka tinggi pohon setelah 1 tahun adalah:

$$t_{12} = 25\ (1 + 2{,}5\%)^{12}$$
$$= 25\ (1{,}025)^{12} = 25(1{,}3449) = 33{,}62 \text{ cm.}$$

Jadi, tinggi tanaman setelah 1 tahun adalah 33,62 cm.

Soal di atas sering disebut sebagai soal pertumbuhan dan $r = (1 + r\%)$ disebut faktor pertumbuhan.

Kegiatan Menulis 3.2

Buktikan rumus suku tengah barisan geometri untuk:

a. n ganjil, $U_{\frac{n+1}{2}} = \sqrt{U_1 U_n}$

b. n genap, $U_{\frac{n}{2}} + U_{\frac{n}{2}+1} = U_1 U_n$

Latihan 3.2

1. Tentukan rasio dari barisan-barisan geometri berikut ini.
   a. 6, 24, 96, . . .
   b. 128, –64, 32, . . .
   c. 25, 5, 1, . . .
   d. –7, –21, –63, . . .
2. Tentukan suku yang diminta pada barisan geometri berikut ini.
   a. 3, 9, 27, . . . suku ke-6
   b. $\frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, . . .$ suku ke-5
   c. 0.5, 0.05, 0.005, . . . suku ke-11
   d. 1,3, . . . suku ke-7
3. Tiga bilangan merupakan barisan geometri. Jumlah ketiga bilangan itu $\frac{13}{3}$ dan hasil kalinya 1. Tentukan bilangan-bilangan tersebut.
4. Tentukan nilai p agar tiga bilangan berurutan $(4p - 1)$, $(2p + 1)$, dan $(p + 10)$ merupakan barisan geometri.
5. Diketahui sebuah barisan bilangan dengan rumus umumnya $U_n = 2 \times 4 - n$.
   a. Buktikan bahwa barisan tersebut merupakan barisan geometri.
   b. Tentukan rasio dan suku pertamanya.
   c. Tentukan suku tengahnya jika $n = 10$.
6. Diketahui barisan geometri $\sqrt{10}$, 10, $10\sqrt{10}$, 100, ... Mulai suku keberapakah besarnya lebih 1 juta?

B. Deret

1. Deret Aritmetika

Jika di antara suku-suku suatu barisan bilangan diberi tanda “ + “ bukan “ , “ maka bentuk yang terjadi dinamakan deret. Misalkan diberikan sebuah barisan: 3, 5, 7, 9, . . .

Barisan di atas merupakan barisan aritmetika dengan beda 2. Namun jika bentuk dari barisan tersebut diubah menjadi: 3 + 5 + 7 + 9 + . . . ; maka bentuk tersebut dinamakan dengan deret aritmetika.

Contoh-contoh lain untuk deret aritmetika adalah sebagai berikut.

a. $5 + 8 + 11 + 14 + . . .$
b. $5 + 3 + 1 + (–1) + . . .$
c. $–3 + 2 + 7 + 12 + . . .$

Jumlah suku-suku dari suku pertama, U_1, sampai suku ke-n, U_n, disebut jumlah n suku pertama dari deret aritmetika, yang ditulis dengan simbol "S_n".

Teorema 3.1

Jika suku pertama deret aritmetika $U_1 = a$, beda b maka jumlah n suku pertamanya adalah $S_n = \frac{1}{2}n(2a + (n - 1))$ atau $S_n = \frac{1}{2}n(a + U_n)$.

Bukti:

$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + . . . + U_{n-2} + U_{n-1} + U_n$, atau
$S_n = U_n + U_{n-1} + U_{n-2} + . . . + U_3 + U_2 + U_1$

Sehingga diperoleh:

$S_n = a + (a + b) + (a + 2b) + . . . + (a + (n – 3)b) + (a + (n – 2)b) + (a + (n – 1)b)$

$S_n = (a + (n – 1)b + (a + (n – 2)b) + (a + (n – 3)b + . . . + (a + 2b) + (a + b) + a$

$2S_n = (2a + (n – 1)b + (2a + (n – 1)b + (2a + (n – 1)b + . . . + (2a + (n – 1)b + (2a + (n – 1)b$

$2S_n = n(2a + (n – 1)b$

$S_n = \frac{1}{2}n(2a + (n – 1)b$ .... (1)

$S_n = \frac{1}{2}n(a + a + (n – 1)b)$

$S_n = \frac{1}{2}n(a + U_n)$ .... (2)

Dari pernyataan $S_n = U_1 + U_2 + U_3 + . . . + U_{n–1} + U_n$ dapat diturunkan bahwa $S_{n–1} = U_1 + U_2 + U_3 + . . . + U_{n–2} + U_{n–1}$, untuk $n > 1$.

Dari dua pernyataan di atas, jika S_n dikurangi dengan $S_{n–1}$, maka hasilnya adalah U_n, atau dengan kata lain dapat dinyatakan: $U_n = S_n – S_{n–1}$, untuk $n > 1$.

Contoh 3.10

Tentukan jumlah 20 suku yang pertama dari deret 4 + 7 + 10 + 13 + . . .

Penyelesaian:

$a = 4$, $b = 7 - 4 = 3$ dan $n = 20$

$S_n = \frac{1}{2} n(2a + (n - 1)b)$

$S_{20} = \frac{1}{2} \times 20(2 \times 4 + (20 - 1)3)$

$S_{20} = 10(8 + 19 \times 3)$

$S_{20} = 10(8 + 57)$

$S_{20} = 10 \times 65 = 650$

Jadi, jumlah 20 suku yang pertama adalah 650.

Contoh 3.11

Tentukan jumlah semua bilangan asli antara 1 dan 200 yang habis dibagi 4.

Penyelesaian:

Bilangan asli antara 1 dan 200 yang habis dibagi 4 dapat dinyatakan ke dalam deret aritmetika berikut.

4 + 8 + 12 + 16 + . . . + 196

Sehingga diperoleh $a = 4$, $b = 8 - 4 = 4$, dan $U_n = 196$

$U_n = a + (n - 1)b$

$196 = 4 + (n - 1)\ 4$

$192 = 4n - 4$

$196 = 4n$

$n = 49$

$S_n = \frac{1}{2} n\ (a + U_n)$

$S_{49} = \frac{1}{2} 49\ (4 + 196)$

$S_{49} = \frac{1}{2} \times 49 \times 200$

$S_{49} = 4.900$

Jadi, jumlah yang ditanyakan adalah 4.900.

Kegiatan Menulis 3.3

Jika rumus umum suku ke-n sebuah deret adalah $U_n = kn + \ell$, k dan ℓ konstanta, apakah deret tersebut adalah deret aritmetika?

Jika rumus umum jumlah n suku yang pertama sebuah deret adalah $S_n = kn^2 + \ell n$, k dan ℓ konstanta, buktikan bahwa deret tersebut adalah deret aritmetika.

Latihan 3.3

1. Hitunglah jumlah semua bilangan asli antara 1 dan 100 yang habis dibagi 8.
2. Jumlah n suku yang pertama suatu deret adalah $S_n = \frac{1}{2}n(11 - n)$.
   a. Hitunglah S_1, S_2, S_3.
   b. Tulislah deret tersebut.
3. Diketahui jumlah n deret yang pertama sebuah deret adalah $S_n = n^2 + n$.
   a. Buktikan bahwa deret tersebut merupakan deret aritmetika.
   b. Tentukan deretnya.
4. Tiga buah bilangan membentuk deret aritmetika. Bilangan terbesar 12 dan hasil kali ketiga bilangan itu –120. Carilah bilangan-bilangan tersebut.
5. Sebuah deret aritmetika terdiri atas 16 suku. Jumlah 6 suku yang pertama adalah 5, jumlah U_7 sampai dengan U_{16} adalah 75. Tentukan U_1.

2. Deret Geometri

Pada subbab sebelumnya telah dipaparkan bahwa, jika di antara suku-suku suatu barisan bilangan diberi tanda “ + “ bukan “ , “ maka bentuk yang terjadi dinamakan deret. Jika di antara suku-suku barisan geometri diberi tanda (+) bukan koma (,), maka bentuk yang terjadi disebut deret geometri.

Definisi

Bentuk umum suatu deret geometri yang suku pertamanya $U_1 = a$, rasio r, $r \neq 1$ dan banyak sukunya n adalah $a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1}$.

Contoh 3.12

a. $2 + 6 + 18 + 54 + \ldots$

b. $\frac{3}{16} + \frac{3}{8} + \frac{3}{4} + \frac{3}{2} + \ldots$

c. $9 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + \ldots$

Teorema 3.2

Jika suatu deret geometri suku pertamanya $U_1 = a$, dan rasio $= r$, maka jumlah n suku pertamanya adalah $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ untuk $r \neq 1$.

Bukti:

Untuk $r \neq 1$

$$\begin{array}{lcl} S_n & = & a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1} \\ rS_n & = & ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1} + ar^n \\ \hline (1-r)S_n & = & a - ar^n \end{array} \; -$$

$$S_n = \frac{(a - a^n)}{1-r} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

Contoh 3.13

Tentukan jumlah 10 suku pertama deret geometri $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots$

Penyelesaian:

$a = 2$, $r = \frac{1}{2}$

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

$$= \frac{2(1-\frac{1^{10}}{2})}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= 4\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right)$$

$$= 4 - \frac{4}{1.024} = \frac{240}{1.024}$$

Contoh 3.14

Diketahui suatu deret, jumlah n suku yang pertama adalah $S_n = 3^n - 4$.

a. Buktikan deret tersebut merupakan deret geometri.
b. Tentukan U_1.
c. Tentukan n terkecil agar $S_n > 6.565$.

Penyelesaian:

Syarat suatu deret geometri adalah $\frac{U_n}{U_{n-1}} = r$ (bilangan konstan).

$S_n = 3^n - 4$
$S_{n-1} = 3^{n-1} - 4$
$U_n = S_n - S_{n-1}$
$U_n = 3^n - 4 - (\frac{1}{3}(3)^n - 4)$ $\qquad U_{n-1} = \frac{2}{3}\ 3^{n-1}$
$= 3^n\ (1 - \frac{1}{3}) = \frac{2}{3}\ 3^n$

Karena $r = 3$ (konstanta), maka deret tersebut merupakan deret geometri.

$S_n = 3^n - 4$
$U_1 = S_1$
$U_1 = 3^1 - 4 = -1$
$S_n > 6.565$
$3^n - 4 > 3^8 + 4$
$3^n > 3^8 + 8$

Jadi, n terkecil agar $S_n > 6.565$ adalah 9.

Latihan 3.4

1. Hitunglah jumlah deret geometri yang diminta pada soal di bawah ini.
   - a. $5 + 10 + 20 + 40 + \ldots, S_7$
   - b. $1 – 2 + 4 – 8 + \ldots, S_{10}$
   - c. $2.000 + 1.000 + 500 + 250 + \ldots, S_9$
   - d. $9 + 3 + 1 + \ldots, S_6$
2. Dalam suatu deret geometri diketahui $U_1 + U_3 = 20$ dan $U_2 + U_4 = –40$. Tentukan U_6 dan S_8.
   - a. Jumlah n suku pertama dari deret geometri adalah $S_n = 3n – 1$.
   - b. Tentukan U_n.
   - c. Tentukan r.
   - d. Tentukan bentuk deretnya.
3. Sebuah deret geometri $S_2 = 6$ dan $S_4 = 30$. Tentukan S_7.
4. Diketahui sebuah deret geometri, $S_5 + S_7 = 160$, r positif, $\log U_1 + \log U_2 + \log U_3 + \log U_4 + \log U_5 = 15 \log 2$. Tentukan S_9.
5. Diketahui sebuah deret geometri $U_1 = 7$, $r = 3$, dan $S_n = 847$. Tentukan n.

3. Deret Geometri Tak Hingga

Pada subbab sebelumnya kita telah membicarakan deret geometri berhingga, sekarang kita akan mempelajari tentang deret geometri tak hingga.

Definisi

Deret geometri tak hingga adalah deret geometri yang memiliki suku tak hingga banyaknya.

a. Deret Divergen

Definisi

Deret divergen adalah deret tak hingga yang jumlah suku-sukunya tak berlimit.

Contoh 3.15:

1. Jelaskan mengapa deret berikut divergen.
   a. $1 + 3 + 9 + 27 + \ldots 3^{n-1}$
   b. $-1 - 2 - 3 - 8 + \ldots -2^{n-1}$
   c. $-5 + 10 + (-20) + \ldots + -5. -2^{n-1}$

Penyelesaian:

a. $1 + 3 + 9 + 27 + \ldots 3^{n-1}$, $a = 1$, $r = 3$

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$
$$= \frac{1(3^n - 1)}{3 - 1}$$
$$= \frac{3^n - 1}{2}$$

Karena 3^n tidak berlimit, maka S_n tidak berlimit. Jadi deret tersebut divergen.

Sudut Matematika

Mencari Informasi Lebih Jauh

Carilah penerapan deret divergen dalam kehidupan sehari-hari. Buatlah dalam bentuk laporan.

b. $-1 - 2 - 3 - 8 + \ldots -2^{n-1}$, $a = -1$, $r = 2$

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$
$$= \frac{1(2^x - 1)}{2 - 1}$$
$$= \frac{1 - r^n}{2}$$

Karena r^n tidak berlimit maka S_n tidak berlimit. Jadi deret tersebut divergen.

c. $-5 + 10 + (-20) + \ldots + -5(-2)^{n-1}$, $a = -1$, $r = 2$

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$
$$= \frac{5(1 - (-2)^n)}{1 - (-2)}$$
$$= \frac{-5 - (-2)^n}{3}$$

Karena $(-2)^n$ tidak berlimit, maka Sn tidak berlimit. Jadi deret tersebut divergen.

2. Suatu virus mempunyai kemampuan berkembang biak menjadi dua kali setiap 5 detik. Pada awalnya terdapat 2 virus jika tidak ada pemusnahan virus itu, berapakah jumlah virus tersebut sampai waktu tak hingga?

   Penyelesaian:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} S_n &= \lim_{x\to\infty} \frac{a(r^n - 1)}{r-1} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{2(2^n-1)}{2-1} \\ &= \lim_{x\to\infty} 2^{n+1} - 2 \approx \infty\end{aligned}$$

Limit tersebut di atas tidak dapat ditentukan hasilnya, ∞ atau- ∞ Mengapa?

b. *Deret Konvergen*

Definisi

> Deret konvergen adalah deret tak hingga yang jumlah suku-sukunya mendekati nilai tertentu (berlimit).

Perhatikan deret geometri tak hingga yang memiliki rasio -1 < r < 1 atau |r|<1. Jumlah *n* suku pertama deret geometri tersebut dirumuskan $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$. Jika *n* mendekati tak hingga maka r^n mendekati 0, sehingga $\frac{ar^n}{1-r}$ juga mendekati nol. Dengan demikian diperoleh

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} S_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r} \\ &= \frac{a}{1-r}\end{aligned}$$

Jadi, jumlah *n* suku pertama pada deret konvergen adalah S_n

$S_n = \frac{a}{1-r}$.

Contoh 3.16:

Hitunglah S_n untuk n mendekati tak hingga.

a. $8 + 4 + 4 + 2 + 1 + . . . + 8\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

b. $16 - 8 + 4 - 2 + . . . 16 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

Penyelesaian:

a. $8 + 4 + 4 + 2 + 1 + . . . + 8.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, a = 8, r = $\frac{1}{2}$

$$S_n = \frac{a}{1-r} = \frac{8}{1-\frac{1}{2}} = \frac{8}{\frac{1}{2}} = 16$$

b. $16 - 8 + 4 - 2 + . . . 16 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, $a = 16$ $r = \frac{1}{2}$

$$S_n = \frac{a}{1-r} = \frac{16}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{16}{\frac{3}{2}} = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3}$$

Contoh 3.17

Diketahui sebuah deret 0,2 + 0,02 + 0,002 + 0,0002 + . . . + $2(0,1)^n$

a. Tentukan jenis deret di atas.

b. Tentukan untuk n mendekati tak hingga.

Penyelesaian:

a. $U_1 = 0,2$; $U_2 = 0,02$; $U_3 = 0,002$

Karena $\frac{U_2}{U_1} = \frac{U_3}{U_2} = \frac{0,02}{0,2} = \frac{0,002}{0,02} = \frac{1}{10}$, maka deret tersebut merupakan deret geometri dengan $U_1 = 0,2$ dan $r = \frac{1}{10}$. Selain itu karena $U_n = U_\infty$ dan $-1 < r < 1$, maka deret tersebut merupakan deret konvergen.

b. Jumlah n suku, untuk n yang mendekati ∞ dari deret konvergen adalah:

$$S_n = \frac{a}{1-r} = \frac{0,2}{1-0,1} = \frac{0,2}{0,9} = \frac{2}{9}$$

Contoh 3.18

Nyatakan bentuk desimal 0,66666 . . . sebagai bentuk pecahan biasa.

Penyelesaian:

0,6666 . . . = 0,6 + 0,06 + 0,006 + 0,0006 + ...

$U_1 = a = 0,6$

$$r = \frac{U_2}{U_1} = \frac{0,06}{0,6} = 0,1$$

$$S_n = \frac{a}{1-r} = \frac{0,6}{1-0,1} = \frac{0,6}{0,9} = \frac{2}{3}$$

Jadi 0,6666 . . . = $\frac{2}{3}$.

Contoh 3.19

Sebuah bola jatuh dari ketinggian 200 cm. Setiap menyentuh tanah bola memantul dengan ketinggian $\frac{1}{2}$ dari ketinggian semula. Hitunglah jarak yang ditempuh bola sampai berhenti di tanah.

Penyelesaian:

Jarak yang ditempuh bola waktu turun

$$= 200 + 200\left(\frac{1}{2}\right) + 200\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + 200\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \ldots$$

Deret ini merupakan deret konvergen dengan $a = 200$ dan rasio $r = \frac{1}{2}$, sehingga: $S_n = \frac{a}{1-r} = \frac{200}{1-0,5} = \frac{200}{0,5} = 400$

Jadi, jarak yang ditempuh bola waktu naik adalah 400 cm.

Jarak yang ditempuh waktu naik

$$= 200\left(\frac{1}{2}\right) + 200\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + 200\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \ldots$$

Deret ini merupakan deret konvergen dengan $a = 200 \times \frac{1}{2} = 100$, $r = \frac{1}{2}$, sehingga $S_n = \frac{a}{1-r} = \frac{100}{1-0,5} = \frac{100}{0,5} = 200$.

Jarak yang ditempuh bola waktu turun adalah 200 cm.

Jadi, jarak yang ditempuh keseluruhannya
= 400 cm + 200 cm = 600 cm.

Latihan 3.5

1. Tentukan p supaya deret berikut konvergen.
   a. $1 + (1 + p) + (1 + p)^2 + \ldots$
   b. $p + p(p - 2) + p(p - 2)^2 + \ldots$
2. Diketahui deret geometri $U_1 = 2000$ dan $U_4 = 2$. Tentukan r dan S_{∞}.
3. Jumlah suku-suku deret geometri turun tak hingga = –3. Jika $U_2 = -\frac{3}{4}$, tentukan rasionya.
4. Keliling suatu persegi adalah 80 cm. Dengan menghubungkan titik tengah sisi-sisi persegi tersebut dapat dibuat persegi kedua. Dengan cara yang sama dibuat persegi ketiga dari persegi kedua. Demikian seterusnya sehingga persegi ke-n yang dibuat kelilingnya mendekati nol. Hitunglah keliling seluruh persegi yang ada.
5. Jumlah suku-suku deret geometri tak hingga adalah 6, jika jumlah suku-suku yang bernomor ganjil adalah 4, tentukan suku kedelapan.

4. Penulisan Deret Aritmetika dan Geometri dalam Notasi Sigma

Perhatikan beberapa deret aritmetika dan geometri di bawah ini.

a. $2 + 8 + 14 + 20 + 26 + 32$
b. $25 + 20 + 15 + 10 + 5 + \ldots$
c. $2 + 6 + 18 + 54 + \ldots$
d. $27 + 9 + 3 + 1 + \ldots$

Untuk menuliskan dalam bentuk deret seperti di atas jelas tidak efektif. Sehingga diperlukan sebuah notasi yang dapat menyatakan jumlah deret tersebut. Notasi yang dimaksud sering disebut dengan notasi sigma (Σ). Untuk mengubah bentuk penjumlahan deret kedalam notasi sigma harus ditentukan dulu rumus suku ke-n (U_n) dari deret. Perhatikan kembali contoh di berikut.

a. $2 + 8 + 14 + 20 + 26 + 32$

Deret ini merupakan deret aritmetika dengan $U_1 = 2$ dan $b = 6$, sehingga rumus suku ke-n-nya adalah:

$$\begin{aligned} U_n &= a + (n - 1)b \\ &= 2 + (n - 1)6 \\ &= 2 + 6n - 6 \\ &= 6n - 4 \end{aligned}$$

Jadi, 2 + 8 + 14 + 20 + 26 +32 = $\sum_{n=1}^{6} 6n - 4$ (dibaca jumlah $6n - 4$ untuk n = 1 sampai dengan n = 6).

b. 25 + 20 + 15 + 10 + 5 + . . .

Deret ini juga merupakan deret aritmetika dengan U_1 = 25 dan b = –5, sehingga rumus suku ke-n-nya adalah:

$U_n = a + (n - 1)b$

$= 25 + (n - 1)(-5) = 25 - 5n + 5 = 30 - 5n$

Jadi, 25 + 20 + 15 + 10 + 5 + . . . + (30 – 5n) = $\sum_{p=1}^{n} 30 - 5p$

c. 2 + 6 + 18 + 54 + . . .

Deret di atas merupakan deret geometri dengan U_1 = 2 dan r = 3, sehingga rumus suku ke-n adalah:

$U_n = a\ r^{n-1}$

$= 2(3)^{n-1} = \frac{2}{3}\ (3)^n$

Jadi, 2 + 6 + 18 + 54 + . . . + $\frac{2}{3}$ $(3)^n$ = $\sum_{p=1}^{n} \frac{2}{3}\ (3)^p$

d. 27 + 9 + 3 + 1 + . . .

Deret di atas merupakan deret geometri dengan U_1 = 27 dan $r = \frac{1}{3}$, sehingga rumus suku ke-n adalah:

$U_n = ar^{n-1}$

$= 27\ (\frac{1}{3})^{n-1} = 81\ (\frac{1}{3})^n$

Jadi, 27 + 9 + 3 + 1 + . . . + 81 $(\frac{1}{3})^n$ = $\sum_{p=1}^{n} 81(\frac{1}{3})^n$

Secara umum dapat didefinisikan

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = \sum_{p=1}^{n} a_p \text{, untuk n > 1 dan } \sum_{p=1}^{1} a_p = a_1$$

Contoh 3.20

Tentukan deret berikut dalam notasi sigma.

a. 7 + 10 + 13 +16 + 19 + 22

b. 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21

c. 5 + 15 + 45 + 135

d. 20 – 10 + 5 – $\frac{5}{2}$ + $\frac{5}{4}$

Penyelesaian:

a. $7 + 10 + 13 + 16 + 19 + 22$

$U_1 = 7,\ b = 3$

$U_n = 7 + (n - 1)\ 3$

$= 7 + 3n - 3$

$= 4 + 3n$

Jadi, $7 + 10 + 13 + 16 + 19 + 22 = \sum_{p=1}^{6} 4 + 3n$

b. $3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21$

$U_1 = 3,\ b = 2$

$U_n = 3 + (n - 1)\ 2$

$= 3 + 2n - 2 = 1 + 2n$

Jadi, $3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 = \sum_{n=1}^{10} 1 + 2n$

c. $5 + 15 + 45 + 135$

$U_1 = 5,\ r = 3$

$U_n = 5\ (3)^{n-1}$

Jadi, $5 + 15 + 45 + 135 = \sum_{n=1}^{4} 5 - 3^{n-1}$

d. $20 - 10 + 5 - \frac{5}{2} + \frac{5}{4}$

$U_1 = 20,\ r = -\frac{1}{2}$

$U_n = 20\ (-\frac{1}{2})^{n-1} = -40\ (-\frac{1}{2})^{n}$

Jadi, $20 - 10 + 5 - \frac{5}{2} + \frac{5}{4} = \sum_{n=1}^{5} -40 \left(-\frac{1}{2}\right)^{n}$

Latihan 3.6

Tulislah deret berikut dalam notasi sigma.

1. $6 + 9 + 12 + 15 + 18$
2. $-3 + 1 + 5 + 9 + 13 + 17 + 21$
3. $12 + 5 - 2 - 9 - 16 - 23 - 30 - 37 - 44 - 51$
4. $100 + 96 + 92 + 88 + 84 + 80 + 76 + 72 + 68 + 64 + 60$
5. $4{,}4 + 3{,}8 + 3{,}2 + 2{,}6 + 2{,}0 + 1{,}4 + 0{,}8 + 0{,}2$

6. $2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128$
7. $1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + 64 - 128$
8. $1 - 3 + 9 - 27 + 81$
9. $1.000 + 500 + 250 + 125$
10. $125 - 50 + 20 - 8 + \frac{16}{5} - \frac{32}{25}$

5. Penerapan Barisan dan Deret dalam Hitung Keuangan

a. Bunga Tunggal

Definisi

Bunga suatu modal disebut bunga tunggal jika sepanjang waktu suatu transaksi keuangan, hanya modal semula yang berbunga.

Dari definisi di atas, maka dapat diturunkan teorema berikut.

Teorema 3.4

Besar bunga tunggal dari sebuah modal M_o, yang diinvestasikan selama n satuan waktu (misal tahun atau bulan) dengan suku bunga = r per satuan waktu adalah sama dengan $b_n = M_o\, r\, n$, sedang besarnya modal pada akhir n satuan waktu adalah $M_n = M_o + b_n = M_o + M_o\, r\, n = M_o\,(1 + r\, n)$

Contoh 3.21

Pada awal tahun, modal sebesar Rp1.000.000,00 diinvestasikan dalam sebuah perusahaan dengan persentase bunga tunggal 10% tiap tahun dalam jangka waktu 5 tahun. Tentukan besarnya bunga pada akhir tahun ke-5 dan besar modal setelah uang diambil kembali.

Penyelesaian:

M_o = Rp1.000.000,00 ; r = 10%; $n = 5$
$b_n = M_o\, r\, n = 1.000.000 \times 10\% \times 5 = 500.000$

Jadi, besarnya bunga pada akhir tahun ke-5 adalah Rp500.000,00.

$$\begin{aligned} M_5 &= M_o(1 + r\, n) \\ &= 1.000.000(1 + 10\% \times 5) \\ &= 1.000.000(1,5) = 1.500.000 \end{aligned}$$

Jadi, modalnya menjadi Rp1.500.000,00.

Macam-macam Bunga Tunggal

1) *Bunga tunggal eksak*

Bunga tunggal eksak memperhitungkan 1 tahun = 365 hari atau 366 untuk tahun kabisat).

a) Bunga tunggal eksak dengan waktu sebenarnya.
   1 tahun = 365 hari atau 366 hari, 1 bulan = jumlah hari dalam kalender.

b) Bunga tunggal eksak dengan waktu pendekatan
   1 tahun = 365 hari atau 366 hari, 1 bulan = 30 hari

2) *Bunga tunggal biasa*

Bunga tunggal biasa memperhitungkan 1 tahun = 360 hari

a) Bunga tunggal biasa dengan waktu sebenarnya
   1 Tahun = 360 hari 1 bulan = jumlah hari dalam kalender.

b) Bunga tunggal biasa dengan waktu pendekatan
   1 tahun = 360 hari dan 1 bulan = 30 hari.

Contoh 3.22

Modal sebesar Rp5.000.000,00 diinvestasikan dari 20 April 2009 sampai dengan 1 Juli 2009, prosentase bunga 6% per tahun.

a. Tentukan besar bunga tunggal eksak dengan waktu sebenarnya.
b. Tentukan besar bunga tunggal eksak dengan waktu pendekatan.
c. Tentukan besar bunga tunggal biasa dengan waktu sebenarnya.
d. Tentukan besar bunga tunggal biasa dengan waktu pendekatan.

Penyelesaian:

a. M_o = 5.000.000, r = 6% per tahun
   Tahun 2005 bukan tahun kabisat, maka 1 tahun = 365 hari
   Banyak hari dari 20 April sampai 1 Juli = (30 – 20) + 31 + 30 + 1 = 72 hari

$$n = 72 \text{ hari} = \frac{72}{365} \text{ tahun}$$

$$b_n = M_o\, r\, n = 5.000.000 \times 6\% \times \frac{72}{365} = 59.178{,}08$$

   Jadi, bunga tunggal eksak dengan waktu sebenarnya = Rp59.178,08.

b. M_o = 5.000.000, r = 6% per tahun, 1 tahun = 365 hari, 1 bulan = 30 hari

$$\begin{array}{lcr} 1 - 7 - 2009 \text{ ditulis } 2009 - 7 - 1 & \Rightarrow & 2009 - 6 - 31 \\ 20 - 4 - 2009 \text{ ditulis} & \Rightarrow & 2009 - 4 - 20 \\ \hline & & 0 - 2 - 11 \end{array} -$$

Jadi, waktu pendekatannya 0 tahun + 2 bulan + 11 hari:

$= 0 + 2 \times 30 + 11 = 71$ hari.

$n = 71 \text{ hari} = \frac{71}{365} \text{ tahun}$

$b_n = M_o\, r\, n = 5.000.000 \times 6\% \times \frac{71}{365} = 58.356{,}16$

Jadi, bunga tunggal eksak dengan waktu pendekatan = Rp58.356,16.

c. $M_o = 5.000.000$, $r = 6\%$ per tahun

1 tahun = 360 hari

Banyak hari dari 20 April sampai 1 Juli

$= (30 - 20) + 31 + 30 + 1 = 72$ hari

$n = 72 \text{ hari} = \frac{72}{360} \text{ tahun}$

$b_n = M_o\, r\, n = 5.000.000 \times 6\% \times \frac{72}{360} = 60.000{,}00$

Jadi, bunga tunggal biasa dengan waktu sebenarnya = Rp60.000,00.

d. $M_o = 5.000.000$, $r = 6\%$ per tahun

1 tahun 360 hari, 1 bulan = 30 hari

1 – 7 – 2009 ditulis 2009 – 7 – 1 ⇒ 2009 – 6 – 31

20 – 4 – 2009 ditulis ⇒ 2009 – 4 – 20

——————— –

0 – 2 – 11

Jadi, waktu pendekatannya 0 tahun + 2 bulan + 11 hari

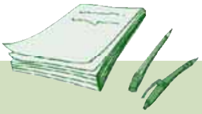
$= 0 + 2 \times 30 + 11 = 71$ hari

$n = 71 \text{ hari} = \frac{71}{360} \text{ tahun}$

$b_n = M_o\, r\, n = 5.000.000 \times 6\% \times \frac{71}{360} = 59.166{,}67$

Jadi, bunga tunggal eksak dengan waktu pendekatan = Rp59.166,67.

Kegiatan Menulis 3.4



Bunga tunggal biasa dengan waktu eksak banyak digunakan oleh bank komersial yang dikenal sebagai aturan bank, karena lebih menguntungkan bagi penanam modal. Mengapa?

Latihan 3.7

1. Dengan menggunakan aturan Bank, hitunglah bunga tunggal dari modal Rp1.000.000,00 dengan suku bunga tunggal 10% per tahun dari 15 April 2009 sampai dengan 24 Juli 2009.
2. Modal sebesar Rp10.000.000,00 dinvestasikan dengan bunga tunggal 2% per bulan selama 2 tahun 4 bulan 15 hari.
   a. Berapa bunga seluruhnya yang diterima?
   b. Berapa besar modal akhirnya?
3. Seseorang meminjam uang di bank sebesar Rp2.000.000,00 dengan bunga tunggal 12% per tahun dalam jangka waktu 4 tahun 3 bulan. Berapa uang yang harus dikembalikan pada saat jangka peminjaman habis.
4. Dalam jangka berapa tahun modal Rp10.000.000,00 menjadi Rp12.800.000,00 diinvestasikan dengan suku bunga tunggal 7% setiap tahun.
5. Utang sebesar Rp4.000.000,00 dengan bunga tunggal 12% per tahun, selama 1 Maret 2009 sampai 25 Agustus 2009.
   a. Tentukan besar bunga tunggal eksak dengan waktu sebenarnya.
   b. Tentukan besar bunga tunggal eksak dengan waktu pendekatan.
   c. Tentukan besar bunga tunggal biasa dengan waktu sebenarnya.
   d. Tentukan besar bunga tunggal biasa dengan waktu pendekatan.

b. Bunga Majemuk

Jika sebuah modal dibungakan dan bunga tiap periode waktu tertentu digabungkan (ditambahkan) dengan modalnya, maka akan ada modal baru pada periode berikutnya. Selanjutnya, modal baru ini juga dibungakan pada periode berikutnya, dan demikian seterusnya. Bunga dengan sistem ini disebut **bunga majemuk**. Penggabungan bunga dan modal dalam periode tertentu dapat dalam jangka waktu tahunan, semesteran, caturwulan, triwulan, bulanan atau dalam satuan waktu lainnya. Jika dalam 1 tahun terjadi *n* kali

penggabungan bunga dengan modalnya maka dikatakan frekuensi penggabungan bunga dan modalnya sama dengan n. Jarak waktu antara penggabungan bunga yang berurutan disebut periode bunga atau periode pengembalian.

Untuk lebih jelasnya perhatikan contoh berikut.

Contoh 3.23

Sebuah modal sebesar Rp100.000,00 dibungakan selama setengah tahun, dengan bunga majemuk 5% tiap tahun dan penggabungan modal dan bunganya tiap tiga bulan.

a. Tentukan periode bunganya.
b. Tentukan frekuensi penggabungannya.
c. Tentukan suku bunga untuk tiap periode bunganya.
d. Tentukan banyak periode bunga selama peminjaman.
e. Berapa besar modal akhir setelah setengah tahun?

Penyelesaian:

a. Penggabungan bunga dan modal tiap tiga bulan, jadi periode bunganya 3 bulan.

b. Tiap 3 bulan terjadi penggabungan, maka dalam 1 tahun terjadi $\frac{12}{3}$ penggabungan. Jadi, frekuensi penggabungannya = 4.

c. Suku bunga untuk setiap periode bunga (r) = $\frac{0{,}05}{4}$ = 0,0125 atau 1,25%.

d. Banyak periode bunga selama peminjaman = $\frac{1}{2}$

e. Pada akhir periode bunga kesatu:
$b_1 = M_o\, r = 100.000 \times 1{,}25\% = 1250$
Modal baru pada akhir periode bunga kesatu:
$M_1 = M_o + b_1 = 100.000 + 1.250 = 101.250$
Pada akhir periode bunga kedua:
$b_2 = 101.250 \times 1{,}25\% = 1.265{,}63$
$M_2 = 10.1250 + 1.265{,}63 = 102.515{,}63$
Jadi, besar modal akhir setelah setengah tahun adalah Rp102.515,63.

Dari contoh di atas dapat diperoleh rumus sebagai berikut.

Jika modal sebesar M_o dibungakan dengan bunga majemuk r untuk setiap periode bunga, maka modal akhir setelah n periode bunga sama dengan

$$M_n = M_o(1 + r)^n$$

Contoh 3.24

Modal sebesar Rp10.000.000,00 dibungakan selama 2 tahun dengan suku bunga 12% setiap tahun dan periode penggabungannya 3 bulan.

a. Tentukan frekuensi penggabungannya.
b. Tentukan suku bunga untuk setiap periode bunganya.
c. Tentukan banyak periode bunga selama peminjaman.
d. Tentukan modal akhir setelah 1 tahun.
e. Tentukan bunga yang diterima seluruhnya.

Penyelesaian:

a. Penggabungan 3 bulan sekali, maka dalam 1 tahun = $\frac{12}{3}$ = 4 penggabungan. Jadi, frekuensi penggabungannya = 4.

b. $r = \frac{12}{4} = 3\%$

c. $n = 2 \times 4 = 8$
Jadi, banyaknya periode bunga selama peminjaman = 8.

d. Modal akhir setelah 2 tahun sama dengan modal akhir periode bunga ke-8.
$M_n = M_o(1 + r)^n$
$M_8 = 10.000.000\ (1 + 3\%)^8 = 12.667.700{,}81$
Jadi modal akhir yang ditanyakan = Rp12.667.700,81

Cara menghitung:
Dengan menggunakan kalkulator scientific:

$\boxed{1{,}03}\ \boxed{\text{inv}}\ \boxed{x^y}\ \boxed{8}\ \boxed{=}\ \boxed{\times}\ \boxed{10000000}\ \boxed{=}$

e. Bunga yang diterima seluruhnya $= M_8 - M_o$
$= \text{Rp}2.667.700{,}81.$

Contoh 3.25

Modal sebesar Rp1.000.000,00 dibungakan dengan bunga majemuk 10% tiap tahunnya. Tentukan jangka waktunya agar nilai akhir menjadi 2 kali nilai tunai.

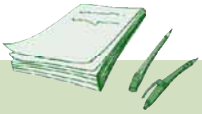
Penyelesaian:

$M_o = 1.000.000$; r = 10% tiap tahun
$M_n = 2 \times 1.000.000 = 2.000.000$; n = ?
$M_n = M_o\ (1 + r)^n$
$M_o = M_n(1 + r)^{-n}$
$\log M_o = \log M_n(1 + r)^{-n}$

$$\begin{aligned}\log 10^6 &= \log (2 \times 10^6) - n \log (1 + 0{,}1)\\ 6 &= \log 2 \times 10^6 - n \log 1{,}1\\ 6 &= \log 2 + \log 10^6 - n \log 1{,}1\\ 6 &= 0{,}301 + 6 - n\ (0{,}0414)\\ 6 &= 6{,}301 - n(0{,}0414)\\ n &= \frac{0{,}301}{0{,}0414} = 7{,}27 = 7\end{aligned}$$

Jadi, harus dibungakan selama 7 tahun.

Kegiatan Menulis 3.2



Menurut pendapat kalian, mana yang lebih menguntungkan penanaman modal dengan bunga tunggal atau dengan bunga majemuk? Jelaskan.

Latihan 3.8

1. Modal Rp2.000.000,00 diinvestasikan selama 4 tahun dengan suku bunga majemuk 4% tiap tahun.
   a. Berapa besar jumlah bunganya?
   b. Jika bunga tersebut dengan bunga tunggal 4% per tahun selama 4 tahun, berapa selisih nilai akhir modal ini dengan nilai akhir hasil penanaman modal dengan bunga majemuk di atas?
2. A meminjam uang sebesar Rp500.000,00 dengan perjanjian akan dikembalikan selama 6 bulan dengan memberi bunga 6% tiap setengah tahun. Berapa uang yang dikembalikan A setelah akhir bulan keenam?
3. Sebuah modal ditanam dengan suku bunga majemuk 6% per tahun. Setelah 3 tahun 3 bulan ternyata modal tersebut menjadi Rp16.000.000,00. Tentukan berapa modal awal yang diinvestasikan.
4. Tentukan nilai tunai (nilai awal) dari Rp1.500.000,00 yang dibayar selama 5 tahun, jika dengan suku bunga 4,5% per tiga bulan.

5. Pada akhir tahun yang bertepatan dengan hari ulang tahun anaknya yang ke-9 seorang ayah menabung uang di bank sebesar Rp250.000,00. Bila suku bunga majemuk 13% per tahun, berapa besar tabungan ayah yang akan diserahkan pada anaknya pada ulang tahun ke-20.

C. Anuitas

1. Pengertian Anuitas

Perhatikan contoh di bawah ini.

a. Pembayaran gaji karyawan perusahaan pada akhir bulan selama 1 tahun sesuai kontrak.

b. Pembayaran uang kost pada awal bulan selama kuliah.

Pada contoh di atas terlihat terjadi pembayaran berurutan yang tetap dalam jangka waktu tertentu. Suatu pembayaran seperti inilah yang diberi nama anuitas. Jangka waktu antara pembayaran-pembayaran tetap misal satu minggu, 1 bulan, 1 tahun disebut interval (periode) pembayaran. Waktu dari mulai interval pertama sampai dengan interval pembayaran terakhir disebut jangka pembayaran / pelunasan.

Ada dua macam anuitas, yaitu:

a. Anuitas pasti yaitu anuitas yang tanggal pembayarannya mulai dan terakhirnya pasti. Contohnya pelunasan utang.

b. Anuitas tidak pasti, yaitu anuitas yang jangka pembayarannya tidak pasti. Contohnya pembayaran santunan asuransi kecelakaan.

2. Pembuatan Tabel Rencana Angsuran Secara Anuitas

Perhatikan ilustrasi berikut.

Pak Ali ingin membeli rumah dari sebuah developer. Untuk itu ia meminjam uang ke sebuah bank sebesar M_o rupiah, dengan persentase bunga sebesar r tiap bulan dalam jangka waktu n bulan. Utang tersebut akan dilunasi secara anuitas sebesar A rupiah.

Rencana angsurannya digambarkan sebagai berikut.

Pada akhir bulan pertama

Pak Ali membayar kepada bank sebesar A rupiah, uang ini digunakan untuk membayar bunga dan angsuran bulan pertama (b_1) sebesar $M_o\, r$ dan untuk angsuran pertama (a_1) sebesar $a_1 = A - b_1 = A - M_o\, r$.

Sehingga sisa utang akhir bulan pertama $M_1 = M_o - a_1$. Sisa utang ini akan menjadi utang awal bulan kedua.

Pada akhir bulan kedua

Pak Ali membayar kepada bank sebesar A rupiah, uang ini digunakan untuk membayar bunga dan angsuran bulan kedua (b_2) sebesar $M_1 r$ dan untuk angsuran pertama (a_2) sebesar $a_2 = A - b_2 = A - M_1 r$.

Sehingga sisa utang akhir bulan pertama $M_2 = M_1 - a_2$. Sisa utang ini akan menjadi utang awal bulan kedua.

.... dan seterusnya.

Pada akhir bulan terakhir

Pak Ali membayar kepada bank sebesar A rupiah, uang ini digunakan untuk membayar bunga dan angsuran bulan terakhir (b_n) sebesar $M_{n-1} r$ dan untuk angsuran terakhir (a_n) sebesar $a_n = A - b_n = A - M_{n-1} r$.

Sehingga sisa utang akhir bulan pertama $M_n = M_{n-1} - a_n = 0$.

Tabel rencananya seperti di bawah ini.

Bulan ke-	**Utang Awal Bulan**	**Anuitas = Rp *A***		**Sisa Utang Akhir Bulan (*M*)**
		Bunga (*b*) dengan Suku Bunga = *r*	**Angsuran (*a*)**	
1	M_o	$b_1 = M_o r$	$a_1 = M_o - b_1$	$M_1 = M_o - a_1$
2	M_1	$b_2 = M_1 r$	$a_2 = M_1 - b_2$	$M_2 = M_1 - a_2$
3	M_2	$b_3 = M_2 r$	$a_3 = M_2 - b_3$	$M_3 = M_2 - a_3$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
n	M_{n-1}	$b_n = M_{n-1} r$	$a_n = M_{n-1} - b_n$	$M_n = M_{n-1} - a_n = 0$

Dari ilustrasi tersebut di atas, maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut.

1. Pembayaran tiap akhir interval tetap sebesar A rupiah, dengan perincian untuk membayar bunga tiap periode pembayaran yang nilainya makin berkurang (mengapa?) sesuai naiknya nilai angsuran ($A = a_1 + b_1 = a_2 + b_2 = \ldots = a_n + b_n$) dan untuk membayar angsuran.
2. $b_m = M_{m-1}r$
3. $a_m = A - b_m$
4. $M_o = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$
5. $M_m = M_{m-1} + a_m$
6. $M_n = 0$

Keterangan:

A adalah besar anuitas

a_m adalah besar angsuran akhir periode pembayaran ke-m

b_m adalah besar bunga selama periode ke-m

r adalah besar prosentase bunga per periode

M_o adalah besar uang yang dipinjam

M_m adalah besar sisa pinjaman pada akhir periode pembayaran

n adalah jangka waktu pembayaran

Contoh 3.26

Pak Badu meminjam uang di bank sebesar Rp1.000.000,00 diangsur secara anuitas dengan angsuran sebesar Rp230.974,80 selama 5 tahun, dengan suku bunga 5% per tahun. Buatlah tabel rencana angsurannya.

Penyelesaian:

Akhir tahun pertama:

Dibayar	A	=	Rp 230.974,80
Pembayaran bunga 5% × Rp1.000.000,00	b_1	=	Rp 50.000,00
Jadi, angsuran pertama	a_1	=	Rp 180.974,80
Sisa utang akhir tahun pertama =			
Rp1.000.000,00 – Rp180.974,80	M_1	=	Rp 819.025,20

Akhir tahun kedua

Dibayar	A	=	Rp 230.974,80
Pembayaran bunga 5% × Rp819.025,20	b_2	=	Rp 40.951,26
Angsuran kedua	a_2	=	Rp 190.023,54
Sisa utang akhir tahun kedua =			
Rp819.025,20 – Rp190.023,54	M_2	=	Rp 629.001,66

Akhir tahun ketiga

Dibayar A = Rp 230.974,80
Pembayaran bunga 5% × Rp629.001,66 b_3 = Rp 31.450,00
Angsuran akhir tahun ketiga a_3 = Rp 199.524,72
Sisa utang akhir tahun ketiga =
Rp629.001,66 – Rp199.524,72 M_3 = Rp 429.476,94

Akhir tahun keempat

Dibayar A = Rp 230.974,80
Pembayaran bunga 5% × Rp429.476,94 b_4 = Rp 21.473,85
Angsuran akhir tahun keempat a_4 = Rp 209.500,95
Sisa utang akhir tahun keempat =
Rp429.476,94 – Rp209.500,95 M_4 = Rp 219.975,99

Akhir tahun kelima

Dibayar A = Rp 230.974,80
Pembayaran bunga 5% × Rp219.975,99 b_5 = Rp 10.998,81
Angsuran akhir tahun kelima a_3 = Rp 219.975,99
Sisa utang akhir tahun kelima =
Rp219.975,99 – Rp219.975,99 M_5 = Rp 0,00

Tabel rencana angsurannya sebagai berikut.

Bulan ke-	**Utang Awal Bulan**	**Anuitas = Rp *A***		**Sisa Utang Akhir Bulan (*M*)**
		Bunga (*b*) dengan Suku Bunga = r	**Angsuran (*a*)**	
1.	Rp1.000.000,00	Rp50.000,00	Rp180.974,80	Rp819.025,20
2.	Rp819.025,20	Rp40.951,26	Rp190.023,54	Rp629.001,66
3.	Rp629.001,66	Rp31.450,08	Rp199.023,54	Rp429.476,94
4.	Rp429.476,94	Rp21.473,85	Rp209.500,95	Rp219.975,99
5.	Rp219.975,00	Rp10.998,81	Rp219.975,99	Rp000.000,00

Latihan 3.9

1. Pinjaman sebesar Rp500.000,00 dilunasi dengan anuitas sebesar Rp72.842,97 tiap akhir tahun. Buat rencana angsuran bila suku bunganya 10% per tahun.

2. Sebuah pinjaman diangsur secara anuitas. Angsuran pertama Rp10.000,00 dengan jangka pelunasan 4 tahun. Suku bunga tiap tahunnya 10%.
   a. Tentukan besar nilai pinjamannya.
   b. Tentukan besar bunga yang harus dibayar pada akhir tahun pertama.
   c. Tentukan nilai anuitasnya.
3. Angsuran akhir bulan kedua suatu pinjaman secara anuitas sebesar Rp40.000,00. Angsuran akhir bulan ketiga sebesar Rp50.000,00. Utang tersebut lunas setelah lima kali mengangsur.
   a. Berapa besar suku bunganya?
   b. Berapa besar angsuran akhir bulan pertama?
   c. Berapa besar angsuran keempat?
   d. Berapa besar bunga yang harus dibayar pada interval pembayaran pertama?
   e. Berapa besar anuitasnya?
4. Suatu pinjaman secara anuitas tahunan dengan jangka pelunasan 15 tahun. Angsuran pertama Rp304.000,00, suku bunganya 6% per tahun. Tentukan berapa besar anuitasnya.
5. Suatu utang dibayar secara anuitas sebesar Rp115.762,50 setiap tahun selama 3 tahun dengan bunga 5% tiap tahun.
   a. Hitunglah angsuran pertamanya.
   b. Hitunglah besar bunga tahun pertama.
   c. Hitung besar angsuran kedua.
   d. Berapakah jumlah seluruh uang yang harus dikembalikan oleh peminjam?
6. Suatu pinjaman sebanyak Rp2.000.000,00 dengan anuitas sebesar Rp461.950,00 per bulan dengan suku bunga 5% per tahun. Dalam berapa bulan utang itu lunas?
7. Suatu pinjaman Rp4.000.000,00 dengan suku bunga 1,5% per bulan dilunasi secara anuitas bulanan sebesar Rp397.175,36.
   a. Berapa jangka pelunasannya?
   b. Berapa besar angsuran pertamanya?
   c. Berapa besar angsuran terakhirnya?

8. Pak Rudi membeli rumah dengan harga Rp50.000.000,00 dengan jalan mengangsur secara anuitas bulanan, selama lima tahun. Cicilan dibayar setelah sebulan menempati rumah. Jika bunga 1,5% per bulan,
   a. berapa besar anuitas yang harus dibayar?
   b. buatlah tabel rencana angsurannya.

Refleksi

Materi apakah yang masih kalian anggap sulit setelah mempelajari bab ini? Ringkas materi terebut kemudian temukan cara yang lebih mudah untuk mempelajarinya.

Rangkuman

1. Barisan U_1, U_2, U_3, . . ., U_n merupakan barisan aritmetika jika $U_2 - U_1 = U_3 - U_2 = \ldots = U_n - U_{n-1} = b$.
2. Suku ke-n barisan aritmetika adalah: $U_n = a + (n - 1)b$
   U_n = suku ke-n
   a = suku pertama
   b = beda
3. Barisan U_1, U_2, U_3, . . . U_n disebut barisan geometri jika
   $$\frac{U_2}{U_1} = \frac{U_3}{U_2} = \ldots = \frac{U_n}{U_{n-1}} = r.$$
4. Suku ke-n barisan geometri adalah $U_n = ar^{n-1}$.
   U_n = suku ke-n
   a = suku pertama
   r = rasio
5. Jumlah suku ke-n deret aritmetika adalah:
   $$S_n = \frac{1}{2}n\,\{2a + (n-1)\,b\} \text{ atau } S_n = \frac{1}{2}n\,\{a + U_n\}$$
   S_n = jumlah suku ke-n
   U_n = suku ke-n
   a = suku pertama

6. Jumlah suku ke-n deret geometri adalah:

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} \text{ untuk } r < 1 \text{ atau } S_n = \frac{a(r^n - 1)}{1 - r}$$

untuk $n > 1$.

a = suku pertama
r = rasio, $r \neq 1$

7. Deret geometri tak hingga, macamnya adalah:
   a. deret divergen, untuk rasio $r > 1$ atau $r < -1 \Rightarrow |r| > 1$
   b. deret konvergen, untuk rasio $-1 < r < 1 \Rightarrow |r| < 1$
8. Jumlah n suku deret konvergen adalah:

$$S_\infty = \frac{a}{1 - r}$$

S_∞ = jumlah suku tak hingga
a = suku pertama
r = rasio

9. Deret aritmetika dan geometri dapat dinotasikan dengan sigma, yaitu:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{p=1}^{n} a_p$$

10. Bunga tunggal, rumusnya:

$$M_n = M_o(1 + r\,n) \Rightarrow b_n = M_o r\,n$$

M_n = modal pada akhir n satuan waktu
M_o = modal
r = prosentase bunga
n = waktu

11. Bunga majemuk, dirumuskan:

$$M_n = M_o(1 + r)^n$$

M_o = modal
r = bunga majemuk

12. Tabel rencana untuk anuitas (*A*)

Bulan ke-	**Utang Awal Bulan**	**Anuitas = Rp *A***		**Sisa Utang Akhir Bulan (*M*)**
		Bunga (*b*) dengan Suku Bunga = *r*	**Angsuran (*a*)**	
1	M_o	$b_1 = M_or$	$a_1 = M_o – b_1$	$M_1 = M_o – a_1$
2	M_1	$b_2 = M_1r$	$a_{-2}= M_1 – b_2$	$M_2 = M_1 – a_2$
3	M_2	$b_3 = M_2r$	$a_3 = M_2 – b_3$	$M_3 = M_2 – a_3$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
n	$M_{n–1}$	$b_n = M_{n–1}r$	$a_n = M_{n–1}– b_n$	$M_n = M_{n–1}–a_n= 0$

A = anuitas
n = jangka waktu pembayaran
M_o = besar uang yang dipinjam
M_n = besar sisa pinjaman pada akhir periode pembayaran
a_n = besar angsuran akhir periode pembayaran ke-*n*
b_n = besar bunga selama periode ke-*n*
r = besar prosentase bunga per periode

Uji Kompetensi

A. Berilah tanda silang (X) pada huruf *a*, *b*, *c*, *d*, atau *e* yang kamu anggap benar.

1. Barisan 2, 5, 10, 17, . . . rumus suku ke-*n* adalah . . . .
   a. $U_n = 3n + 1$
   b. $U_n = 1 + n^2$
   c. $U_n = n^2 – 1$
   d. $U_n = 5 – 3n$
   e. $U_n = 3 – n$

2. Jika $4p$, $2q$ dan r merupakan barisan geometri, maka berlaku . . . .
   a. $p^2 + qr = 0$
   b. $q^2 + pr = 0$
   c. $r^2 + pq = 0$
   d. $p^2 - qr = 0$
   e. $q^2 - pr = 0$

3. Dalam suatu barisan aritmetika suku ke-7 = $7\sqrt{2} + 5$ dan suku ke-11 = $11\sqrt{2} + 9$ suku ke-10 adalah . . . .
   a. $8 + 10\sqrt{2}$
   b. $10 + 10\sqrt{2}$
   c. $10 + 8\sqrt{2}$
   d. $10 + 11\sqrt{2}$
   e. $11 + 10\sqrt{2}$

4. Tiga buah bilangan yang berurutan merupakan barisan geometri. Hasil kali ketiganya adalah 1.728. Jika jumlah ketiga bilangan tersebut 36, maka ketiga bilangan yang dimaksud adalah . . . .
   a. 5, 10, 20
   b. 2, 12, 24
   c. 3, 9, 27
   d. 4, 12, 22
   e. –6, 12, –24

5. Jika 24 + 20 + 16 + . . . sama dengan nol, maka banyak sukunya adalah . . . .
   a. 0
   b. 7
   c. 11
   d. 14
   e. 26

6. Sebuah bola dijatuhkan dari ketinggian 1 m. Setiap kali sesudah jatuh mengenai lantai, bola itu dipantulkan lagi dan mencapai tinggi $\frac{3}{4}$ dari tinggi sebelumnya. Maka panjang seluruh jalan yang dilalui bola itu sampai berhenti adalah . . . .
   a. 2 m
   b. 3 m
   c. 4 m
   d. 7 m
   e. 8 m

7. Dari sebuah deret aritmetika diketahui suku ketiga sama dengan 9 sedangkan jumlah suku kelima dan ketujuh sama dengan 36. Maka jumlah sepuluh suku yang pertama adalah . . . .

a.	–270	d.	98
b.	–170	e.	270
c.	–100		

8. Deret aritmetika 7 + 10 + 13 + 16 + 19 + 22 + 25 dapat ditulis dengan notasi sigma sebagai berikut, yaitu . . . .

a. $\sum_{n=1}^{7} (3n + 1)$

b. $\sum_{n=1}^{7} (10 - 3n)$

c. $\sum_{n=3}^{9} (10 - n)$

d. $\sum_{n=2}^{8} (3n + 1)$

e. $\sum_{n=2}^{8} (2n + 3)$

9. $\sum_{n=2}^{15} (3n - 2)$ adalah . . . .

a.	322	d.	435
b.	329	e.	660
c.	330		

10. Pada akhir tahun 2005 penduduk di suatu desa 225.000 jiwa. Jika tiap tahun penduduk bertambah 20%, maka akhir tahun 2010 banyak penduduk desa itu adalah . . . .

a. 2.6^{11} jiwa

b. 2.10^{10} jiwa

c. 2.6^{9} jiwa

d. 2.6^{8} jiwa

e. 2.6^{7} jiwa

11. Seorang menabung Rp100.000,00 di suatu bank. Jika bank memberikan bunga tunggal 3% per tahun. Setelah empat tahun uangnya di bank menjadi . . . .
    a. Rp133.200
    b. Rp112.000
    c. Rp110.000
    d. Rp101.200
    e. Rp101.000

12. Modal sebesar Rp50.000,00 dibungakan secara tunggal dengan bunga *p* per bulan. Setelah 10 tahun bunga yang diterima Rp120.000,00. Maka nilai *p* yang memenuhi adalah . . . .
    a. 2,4
    b. 2
    c. 0,24
    d. 0,2
    e. 0,02

13. Sebuah modal sebesar Rp100.000,00 dibungakan dengan bunga majemuk 10% per tahun. Kemudian setelah beberapa tahun uang itu dikembalikan dengan jumlah Rp146.410,00. Maka jangka waktu itu adalah . . . .
    a. 2 tahun
    b. 3 tahun
    c. 4 tahun
    d. 5 tahun
    e. 6 tahun

14. Uang sebanyak Rp100.000,00 didepositokan untuk 3 tahun dengan suku bunga majemuk 10% per tahun. Besarnya bunga pada akhirnya tahun ketiga adalah . . . .
    a. Rp30.000,00
    b. Rp33.000,00
    c. Rp33.100,00
    d. Rp33.300,00
    e. Rp36.000,00

15. Suatu pinjaman sebesar Rp900.000,00 tertanggal 14 Juli 2004. Jika bunganya 5% setahun, maka bunga pada tanggal 1 Desember 2000 adalah . . . .
    (1 tahun = 360 hari)
    a. Rp21.250,00
    b. Rp20.625,00
    c. Rp17.500,00
    d. Rp16.875,00
    e. Rp15.000,00

B. Jawablah pertanyaan-pertanyaan di bawah ini dengan benar.

1. Sebuah benda bergerak sejauh 1.000 m. Gerakan kedua sejauh 800 m, gerakan ketiga sejauh 640 m, dan seterusnya setiap gerak dari gerakan berikutnya selalu $\frac{4}{5}$ kali dari jarak yang ditempuh pada gerakan sebelumnya. Tentukan jumlah jarak seluruhnya yang ditempuh oleh benda tersebut sampai berhenti.
2. Seorang karyawan pada permulaan ia bekerja memperoleh gaji Rp100.000,00. Apabila setiap tahun dia mendapat kenaikan gaji 10%. Tentukan gaji karyawan itu pada tahun ke-10.
3. Modal sebesar Rp200.000,00 diinvestasikan pada tiap-tiap permulaan tahun berturut-turut sampai lima tahun dengan bunga majemuk 15% per tahun. Tentukan besarnya investasi pada saat jatuh temponya.
4. Tiga bilangan yang merupakan deret geometri, jika jumlah ketiga bilangan itu 18 dan hasil kali ketiga bilangan itu 216. Tentukan rasio dari deret tersebut.

Latihan Semester 2

Berilah tanda silang (X) pada huruf *a*, *b*, *c*, *d*, atau *e* yang kalian anggap benar.

1. Deret hitung 84; 80,5; ... suku ke n akan menjadi nol apabila . . . .

a. $n = 23$
b. $n = 24$
c. $n = 25$
d. $n = 26$
e. $n = 27$

2. Banyaknya bilangan-bilangan di antara 300 dan 700 yang habis dibagi 4 adalah . . . .

a. 98
b. 99
c. 100
d. 101
e. 102

3. Suku ke 5 suatu deret hitung habis dibagi 6. Bila beda deret itu habis dibagi 5, maka suku ke dua tentu habis dibagi . . . .

a. 4
b. 6
c. 2
d. 3
e. 5

4. Jumlah suku-suku yang nomor ganjil pada suatu deret ukur tak terhingga adalah 4. Kalau deret itu sendiri jumlahnya = 6, maka deret itu adalah . . . .

a. $3, \frac{3}{4}, \frac{3}{16} \ldots$
b. $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4} \ldots$
c. $\frac{3}{8}, \frac{3}{16}, \frac{3}{32} \ldots$
d. $3, \frac{3}{8}, \frac{3}{64} \ldots$
e. $\frac{3}{8}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}, 3 \ldots$

5. Suku pertama, suku keempat dan suku ketigabelas dari deret aritmetika merupakan deret geometri. Bila jumlah ketiga suku tersebut adalah 39 maka jumlah lima suku pertama deret aritmatika adalah . . . .

a. 50
b. 42
c. 40
d. 39
e. 35

6. Tiga bilangan merupakan suatu deret ukur yang jumlahnya = 12. Jika bilangan yan ditengahnya ditambah 3 maka ketiganya merupakan deret hitung. Bilangan yang ditengah tengah ialah . . . .
   a. 2
   b. 6
   c. 4
   d. 3
   e. –1

7. Jumlah dari deret tak terhingga $\frac{6}{10}; \frac{6}{102}; \frac{6}{103}; \frac{6}{104} \ldots$ adalah . . . .
   a. 0.7
   b. $\frac{2}{3}$
   c. 1
   d. $\frac{1}{3}$
   e. 0.3

8. Suku ke-10 dari barisan : 3, 5, 7, 9, ..., adalah . . . .
   a. 11
   b. 15
   c. 19
   d. 21
   e. 27

9. Sebuah bola jatuh dari ketinggian 2,5 meter dan memantul dengan ketinggian $\frac{3}{5}$ kali tinggi semula. Dan setiap kali memantul berikutnya, mencapai tinggi $\frac{3}{5}$ kali tinggi pantulan sebelumnya. Maka jarak lintasan bola sampai seluruhnya berhenti adalah . . . .
   a. 5,5 m
   b. 7,5 m
   c. 9 m
   d. 10 m
   e. 12,5

10. Dari suatu deret hitung diketahui jumlah 4 suku pertama sama dengan 7 dan jumlah 8 suku pertama sama dengan 58. Maka suku pertama dari deret tersebut ialah . . . .
   a. 1
   b. 1,5
   c. 2
   d. 3
   e. 4

11. Antara bilangan 20 dan 116 disisipkan 11 bilangan sehingga terjadi sebuah deret hitung, maka jumlah deret hitung adalah . . . .
    a. 816
    b. 880
    c. 884
    d. 768
    e. 952

12. Deret ukur 30, 40, 20 ...
    Suku ke n akan menjadi nol apabila . . . .
    a. $n = 6$
    b. $n = \sim$
    c. $n = \frac{1}{p}$
    d. $n = p$
    e. $n = 1$

13. Suku ke-n barisan aritmatika dinyatakan dengan rumus $U_n = 5n - 3$. Jumlah 12 suku pertama dari deret yang bersesuaian adalah . . . .
    a. 27
    b. 57
    c. 342
    d. 354
    e. 708

14. Suku ketiga dari suatu barisan geometri adalah 18 dan suku ke-6 adalah 488. Suku ke-5 dari barisan tersebut . . . .
    a. 27
    b. 54
    c. 81
    d. 162
    e. 243

15. Jumlah n suku pertama dari sebuah deret Aritmatika adalah $S_n = \frac{1}{2}n(3n - 1)$. Beda deret aritmatika tersebut adalah . . . .
    a. –3
    b. –2
    c. 2
    d. 3
    e. 4

Daftar Pustaka

Crowell, B. 2003. *Calculus Light and Matter, Fullerton*.

Duncan Cramer, Dennis Howitt. 2004. *Sage Dictionary of Statistics*.

Faraz, H. 2006. *Understanding Calculus.*

Garrett, P. 2006. *Notes on First Year Calculus.* University of Minnesota.

http://www.understandingcalculus.com.

Kallenberg, O. 2002. *Foundations of Modern Probability, 2nd ed*. Springer Series in Statistics.

Pusat Kurikulum. 2006. *Kurikulum Tingkat Satuan Pendidikan*. Jakarta: Depdiknas.

Stroyan, K.D. 2004. *A Brief Introduction to Infinitesimal Calculus*. University of Iowa.

Indeks

Glosarium

Barisan. Urutan bilangan-bilangan menurut suatu aturan tertentu.

Beda. Selisih suku ke dua dengan suku pertama, suku ketiga dengan suku kedua dan seterusnya pada barisan aritmetika.

Deret. Penjumlahan suku-suku suatu bilangan.

Fungsi objektif. Fungsi yang dioptimumkan (dimaksumumkan atau diminimumkan) dari model matematika pada program linear.

Fungsi tujuan. Fungsi yang menunjukkan sasaran dari pengoptimalan yang mungkin dicapai berdasar batasan-batasan yang ada pada program linear.

Himpunan. Kumpulan benda-benda yang jelas (real) atau tidak jelas (abstrak).

Himpunan penyelesaian. Himpunan jawaban dari persamaan atau pertidaksamaan.

Invers matriks. Matriks kebalikan dari suatu matriks persegi.

Kesamaan matriks. Matriks-matriks dengan ordo yang sama dan elemen-elemen yang seletak dari matriks-matriks tersebut sama.

Matriks. Jajaran bilangan (biasa disebut unsur atau elemen) yang disusun dalam bentuk baris dan lajur hingga berbentuk persegi panjang.

Matriks identitas. Atau matriks satuan yaitu matriks persegi yang semua unsur diagonalnya sama dengan 1, dan semua unsur yang lain sama dengan 0.

Matriks persegi. Matriks dengan jumlah baris sama dengan jumlah kolom.

Ordo matriks. Ukuran baris dan kolom pada matriks.

Rasio. Pembanding antara suku ke dua dengan suku pertama, suku ke tiga dengan suku ke dua, dan seterusnya pada barisan geometri.

Sigma. Jumlah dari bilangan-bilangan.

Transpose matriks. Matriks yang diperoleh dengan menukar baris menjadi kolom dan kolom menjadi baris.

Pertidaksamaan. Kalimat terbuka yang menggunakan tanda ketidaksamaan dan mengandung variabel.

Pertidaksamaan linear. Pertidaksamaan yang pangkat tertinggi variabelnya adalah satu.

■Kunci

Bab 1. Program Linear

1. c
3. b
5. c
7. c
9. d

Bab 2. Matriks

1. a
3. d
5. e
7. b
9. c

Bab 3. Barisan dan Deret

1. a
3. a
5. c
7. a
9. b
11. b
13. c
15. d

Matematika

Untuk Sekolah Menengah Atas & Madrasah Aliyah Kelas XII

Bahasa

ISBN 979-462-911-1

Buku ini telah dinilai oleh Badan Standar Nasional Pendidikan (BSNP) dan telah dinyatakan layak sebagai buku teks pelajaran berdasarkan Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Nomor 43 Tahun 2008 tanggal 10 Juli tentang Penetapan Buku Teks Pelajaran yang Memenuhi Syarat Kelayakan untuk Digunakan dalam Proses Pembelajaran.

Harga Eceran Tertinggi Rp.....

ISBN 979113121X
9 789791 131216